APPUNTI DI MATEMATICA
Il principio di induzione

A cura di Ugo Morra

Nell'insieme dei numeri naturali vale il seguente *assioma del buon ordinamento*:
ogni sottoinsieme non vuoto dei numeri naturali ammette un elemento minimo.
In altre parole se $\phi \neq S \subseteq N$, allora $\exists m \in S$ t.c. $m \leq s \quad \forall s \in S$

(m è l'elemento minimo di S)

PRINCIPIO DI INDUZIONE O DI RICORRENZA (PRIMA FORMA)

Consideriamo, per ogni numero naturale n, una proprietà P(n) ad esso associata.
Se

1. P(1) è vera
2. P(n-1) vera $\Rightarrow$ P(n) vera

allora P(n) è vera $\forall n \in N$.

Dim: Sia S l'insieme dei numeri naturali per i quali la proprietà P(n) non è vera:

$$S = \{x / x \in N \wedge P(x) \text{ è falsa}\}.$$

Ci proponiamo di provare che S è vuoto.
Supponiamo allora che S non sia vuoto (ragionamento per assurdo) e proviamo che ne segue una contraddizione.
Sia dunque $S \neq \phi$. Allora per l'assioma del buon ordinamento, S ha un minimo m. Dunque P(m) è falsa (perché $m \in S$), mentre P(1) è vera (ipotesi 1). Allora $m \neq 1$, quindi $m > 1$; poiché m è il minimo di S, $m-1 \notin S$ e perciò P(m-1) è vera. Quindi per l'ipotesi 2 anche P(m) è vera, perché m=(m-1)+1. Così P(m) sarebbe contemporaneamente vera e falsa: un controsenso. Si conclude che l'eventualità $S \neq \phi$ non si può presentare, cioè S è vuoto, come volevamo.

ESERCIZI:

1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in N$
2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in N$
3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \forall n \in N$
4) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1, \quad \forall n \in N$
5) $2^n > n, \quad \forall n \in N$
6) Sia $a \geq -1$. $(1+a)^n \geq 1 + na, \quad \forall n \in N$ (disuguaglianza di Bernoulli)

7) Sia $a \neq -1$. $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n \in N$

8) Dimostrare che, qualunque sia $n \in N$, il numero $n^2 + n$ è pari.

9) Dimostrare che $\sum_{k=1}^{n} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \log \frac{2(n+1)}{n+2}$, $\forall n \in N$