Due chiacchiere sui vettori e sul loro uso nei luoghi geometrici.

A cura del Prof. Ugo Morra
www.morra.altervista.org

In matematica, ed in particolare in geometria, un luogo geometrico, o, più semplicemente, un luogo, è l'insieme dei punti del piano o dello spazio euclideo che hanno in comune una determinata proprietà. Di solito questa proprietà riguarda nozioni geometriche ed è espressa con formule matematiche, ed il luogo geometrico forma una o più figure continue nell'ambiente del quale fa parte (del piano, dello spazio tridimensionale...). Per esempio le sezioni coniche sono definite significativamente come luoghi del piano:

1. la *circonferenza* è il luogo dei punti la cui distanza da un punto dato è costante; questo punto è chiamato centro e la distanza è detta raggio della circonferenza;
2. l'*ellisse* è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi chiamati fuochi;
3. la *parabola* è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto detto fuoco e da una retta detta direttrice della parabola;
4. l'*iperbole* è il luogo dei punti del piano per i quali è costante il modulo della differenza delle distanze da due punti fissi chiamati fuochi.

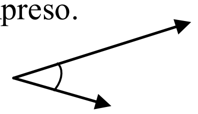
Altri semplici e fondamentali luoghi geometrici sono:

l'*asse di un segmento*: luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento,
la *bisettrice di un angolo*: luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

Ricordiamo ora la definizione di prodotto scalare di due vettori.

Dati due vettori $\vec{u}$ e$\vec{v}$, il loro prodotto scalare è dato dal prodotto dei loro moduli, moltiplicato per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = u\ v \cos\alpha$

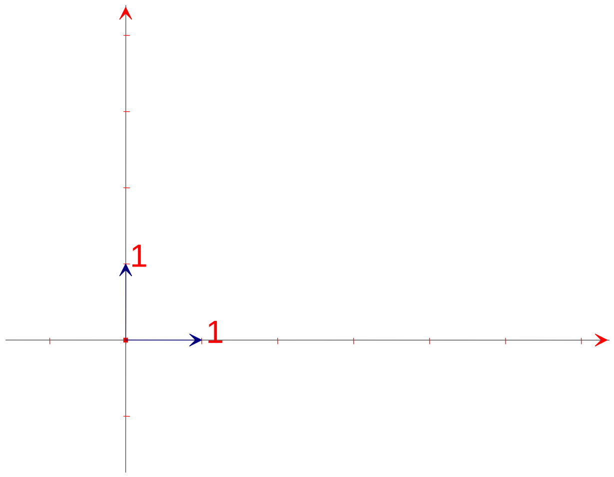


Come caso particolare, se due vettori entrambi non nulli hanno prodotto scalare uguale a zero, ciò significa che essi sono tra loro perpendicolari.

Esempio.

Se il punto d'applicazione di una forza $\vec{F}$ costante (in intensità, direzione e verso) subisce uno spostamento, si dice che la forza ha compiuto un lavoro pari, per definizione, al prodotto scalare tra il vettore spostamento $\vec{s}$ e lo stesso vettore forza $\vec{F}$.

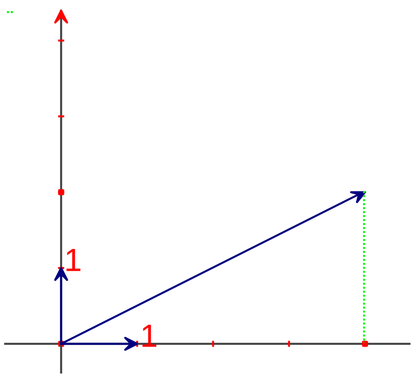
Ricordiamo l'espressione dei vettori in componenti cartesiane ortogonali. Sia assegnato un piano cartesiano xOy e, in esso, due vettori 'speciali', indicati con $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Cosa hanno di così speciale? Essi hanno modulo unitario (ovvero sono dei versori) e sono "coricati" sugli assi cartesiani.



Con ciò intendiamo che il versore $\vec{i}$ ha la direzione e il verso del semiasse positivo delle x e modulo uguale a 1; il versore $\vec{j}$ ha la direzione e il verso del semiasse positivo delle y e modulo uguale a 1.

Consideriamo ora un vettore $\vec{s}$. Poniamo la sua coda nell'origine del sistema di riferimento xOy.

Con riferimento alla figura si può scrivere il vettore $\vec{s}$ tramite la relazione seguente:
$\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j}$.



Si può facilmente dimostrare che il prodotto scalare di due vettori espressi in componenti cartesiane ortogonali, è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe. Se per esempio i vettori sono $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ e $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$, allora $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

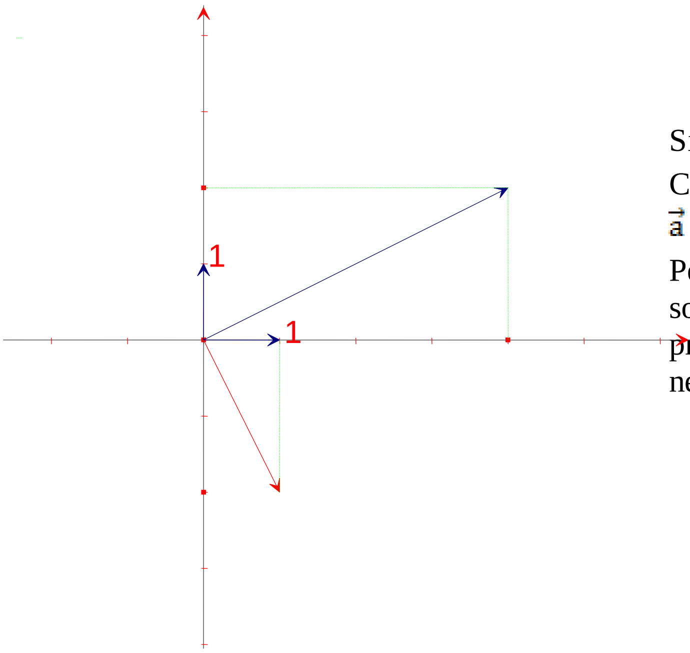
Osservazione: le componenti cartesiane ortogonali possono essere formalizzate nel seguente modo:

$\vec{a} = [a_x, a_y]$ al posto di $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.

Dunque con la nuova notazione risulta:

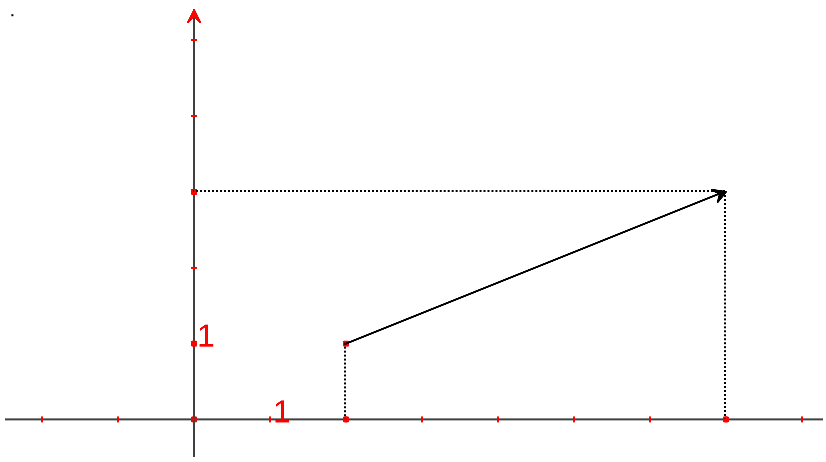
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [a_x, a_y] \cdot [b_x, b_y] = a_x b_x + a_y b_y$$

Quella offerta dal prodotto scalare può essere una tecnica comodissima per stabilire se due vettori sono perpendicolari o no. Vediamolo dal seguente esempio:



Siano dati i due vettori $\vec{a} = [4{,}2]$ e $\vec{b} = [1, -2]$. Calcoliamo il loro prodotto scalare:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = [4{,}2] \cdot [1, -2] = 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4$
Pertanto possiamo concludere che i due vettori sono perpendicolari tra loro poiché il loro prodotto scalare è uguale a zero, senza che nessuno dei due vettori sia nullo.

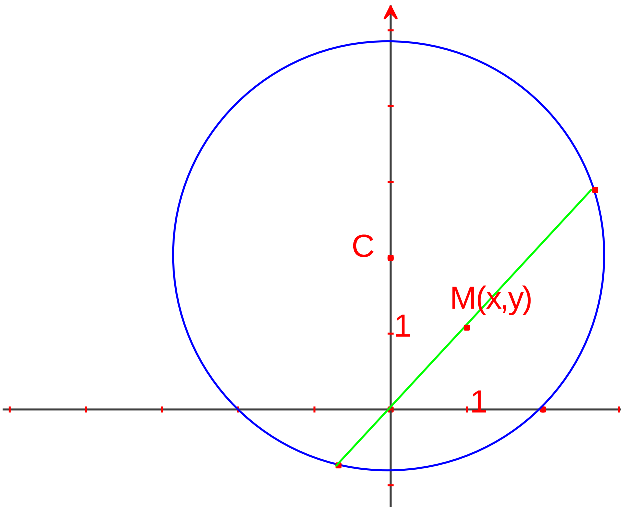
Se in un riferimento cartesiano i punti origine ed estremi di un vettore $\overrightarrow{AB}$ sono dati attraverso le loro coordinate cartesiane, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ si ottengono dalla differenza delle corrispondenti coordinate dell'estremo B con quelle del punto iniziale A, ossia $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = [x_B - x_A,\ y_B - y_A]$



Il modulo di $\overrightarrow{AB}$ si ottiene applicando il Teorema di Pitagora: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Esempio di luogo geometrico determinato con la geometria vettoriale.

Trovare il luogo geometrico dei punti medi delle corde della circonferenza $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$*, sapendo che le rette contenenti tali corde passano per l'origine delle coordinate.*

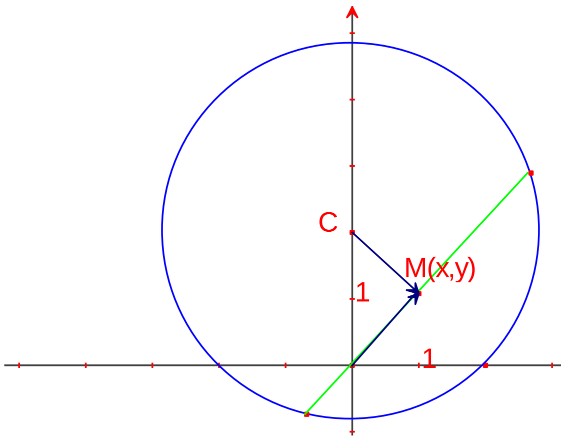


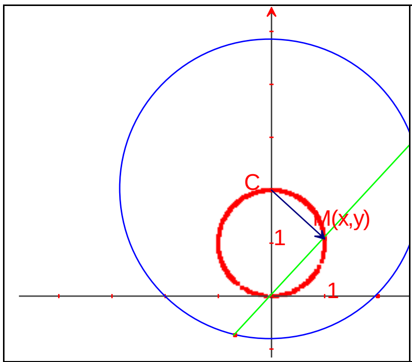
Dopo aver rappresentato la circonferenza di centro il punto C(0,2) e raggio r $= 2\sqrt{2}$, si applica la proprietà secondo la quale l'asse di una qualsiasi corda passa per il centro della circonferenza. E' grazie a questa proprietà che possiamo determinare rapidamente l'equazione del luogo cercato. Dette infatti (x,y) le coordinate del punto M che descrive il luogo (punto medio della generica corda per l'origine), per la proprietà suddetta, il segmento CM è perpendicolare alla corda e quindi anche ad una parte di essa, come per esempio OM.

Per esprimere la perpendicolarità tra segmenti, possiamo servirci del prodotto scalare dei vettori che "li identificano". Scegliamo dunque il vettore $\overrightarrow{CM}$ ed il vettore $\overrightarrow{OM}$, le cui componenti cartesiane ortogonali sono:

$$\overrightarrow{CM} = [x_M - x_C, y_M - y_C] = [x - 0, y - 2] = [x, y -$$

$$\overrightarrow{OM} = [x_M - x_O, y_M - y_O] = [x - 0, y - 0] = [x, y]$$





Dunque imponiamo la perpendicolarità tra i due vettori, uguagliando a zero il loro prodotto scalare:

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \Leftrightarrow [x, y - 2] \cdot [x, y] = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)y = 0 \Leftrightarrow x^2$$

Quest'ultima è l'equazione del luogo cercato. Si tratta (vedi figura) della circonferenza di centro C'(0,1) e raggio 1.

Infine ricordo la proprietà diofantea illustrata nel corso del secondo incontro:

Teorema: siano a, b, c numeri interi.

L'equazione $ax + by = c$ ha soluzioni intere se e solo se c è divisibile per il massimo comune divisore di a e b, cioè se e solo se $\mathrm{MCD}(a, b) \mid c$.