PROVA SCRITTA DI MATEMATICA
LICEO SCIENTIFICO "R. NUZZI" DI ANDRIA
CLASSE V B
Prof. U. Morra

Il fumo talvolta offusca le idee, soprattutto quelle matematiche. Prendi coraggio e smetti di fumare! Perderai il vizio ma ci guadagnerai in salute.

1. Studia il grafico della funzione $y = x \cdot ln^2 x$. Determina poi i punti del grafico (ascissa e ordinata di entrambi) in cui la tangente alla curva è perpendicolare alla retta $x + 3y = 3$. Scrivi l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa maggiore.

2. Calcola, mediante la giustificata applicazione del teorema di de l'Hopital, il seguente limite:
$$\lim_{x \to 5^+} \frac{\ln(x^2-5x)}{\ln(x-5)}$$

3. Analizza continuità e derivabilità della funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & \text{per } -2 < x \leq 0 \\ e^{-x}-1 & \text{per } 0 < x < 2 \end{cases}$$

4. Dimostra, utilizzando il teorema di Rolle, che l'equazione $x^5+x+3=0$ ha una sola soluzione reale.

5. Determina a e b in modo tale che la funzione $y = \frac{x^2+a}{x+b}$ abbia un punto di massimo relativo per $x = -1$ e un punto di minimo relativo per $x = 2$.

6. Tra tutti i rettangoli di area $4a^2$, trova quello di diagonale ~~massima.~~ minima.

7. Calcola la derivata della funzione $f(x) = 2 \operatorname{arcsen} x - \arccos(1-2x^2)$. Che conclusioni si possono trarre sulla funzione?

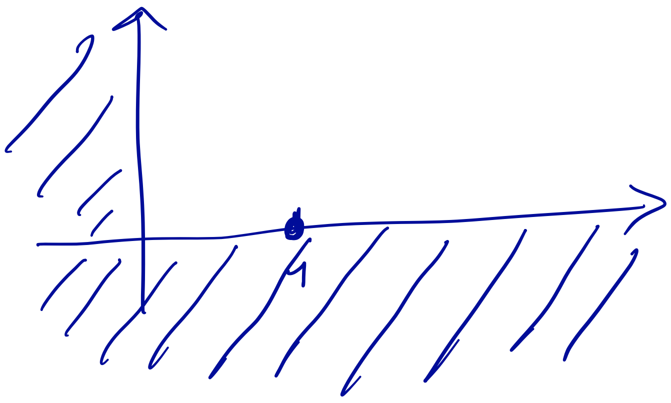
1) $y = x\ln^2 x$ funzione trascendente

$D =]0,+\infty[$

$y \geq 0 \quad \forall x>0$

$(\ln^2 x \geq 0 \quad \forall x>0)$

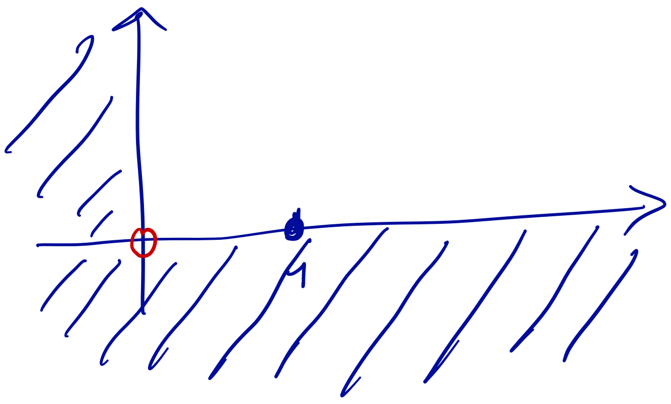
$y=0 \iff x=1$



$\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x = 0\cdot(+\infty)$ f.i.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{De L.}}{\overset{(\text{se } \exists)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{2(\ln x)\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2\,\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$\underset{\text{De L.!}}{\overset{(\text{se } \exists)}{=}} -2\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2\lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$



$\lim_{x\to +\infty} x\ln^2 x = +\infty$

$\nexists$ asintoti obliqui perché

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \ln^2 x = +\infty$

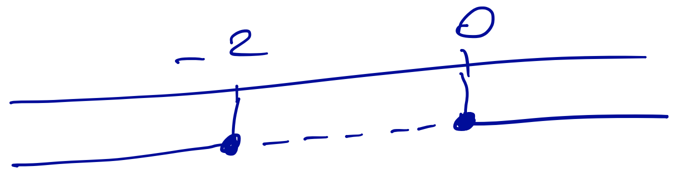
Dunque la funzione non è asintotica ad alcuna retta.

Studio della monotonia:

$f'(x) = \ln^2 x + x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x} = \ln^2 x + 2\ln x \geq 0$

$\boxed{t := \ln x}$

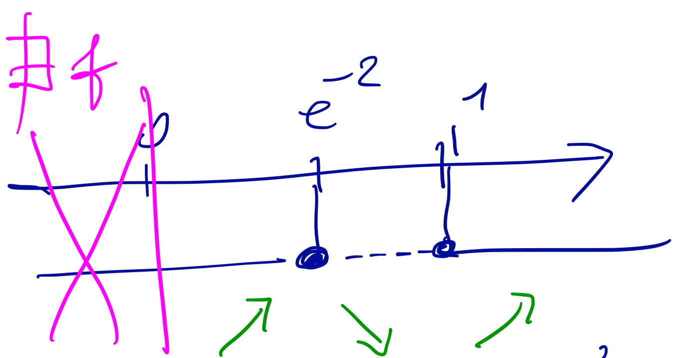
$t^2+2t \geq 0$



$t \leq -2 \vee t \geq 0$

$\ln x \leq -2 \vee \ln x \geq 0$

$x \leq e^{-2} \vee x \geq 1$



$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ è punto di max relativo

$f(e^{-2}) = e^{-2}\ln^2 e^{-2} = \frac{1}{e^2}(\ln e^{-2})^2 = \frac{1}{e^2}\cdot 4 = \frac{4}{e^2}$

$x=1$ è punto di minimo relativo della f.ne

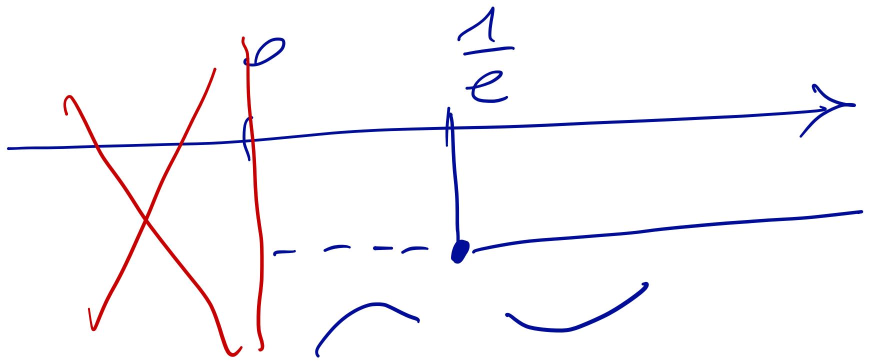
$f(1)=0$. Poiché $f(x)\geq 0 \ \forall x>0 \Rightarrow x=1$ è punto di minimo assoluto.

Studio di Concavità/convessità:

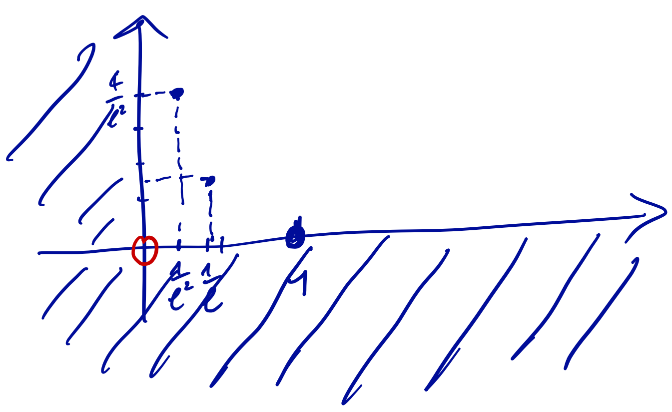
$$f''(x) = D\left[\ln^2 x + 2\ln x\right] = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + 2\,\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{2}{x}(\ln x + 1) \geq 0 \iff \ln x \geq -1$$

$$x \geq e^{-1}$$



$x = \frac{1}{e}$ è punto di flesso a tangente obliqua (giacché $f'\left(\frac{1}{e}\right) \neq 0$) $\quad f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{e}(-1)^2 = \frac{1}{e}$



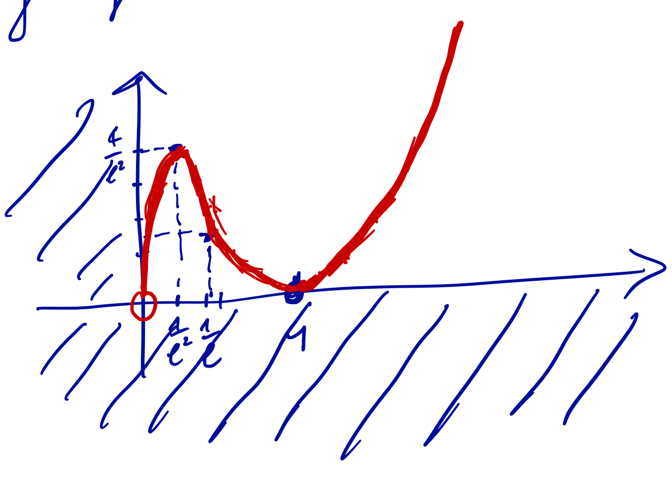
Per disegnare bene il grafico si può calcolare la pendenza con cui esso si avvicina all'origine:

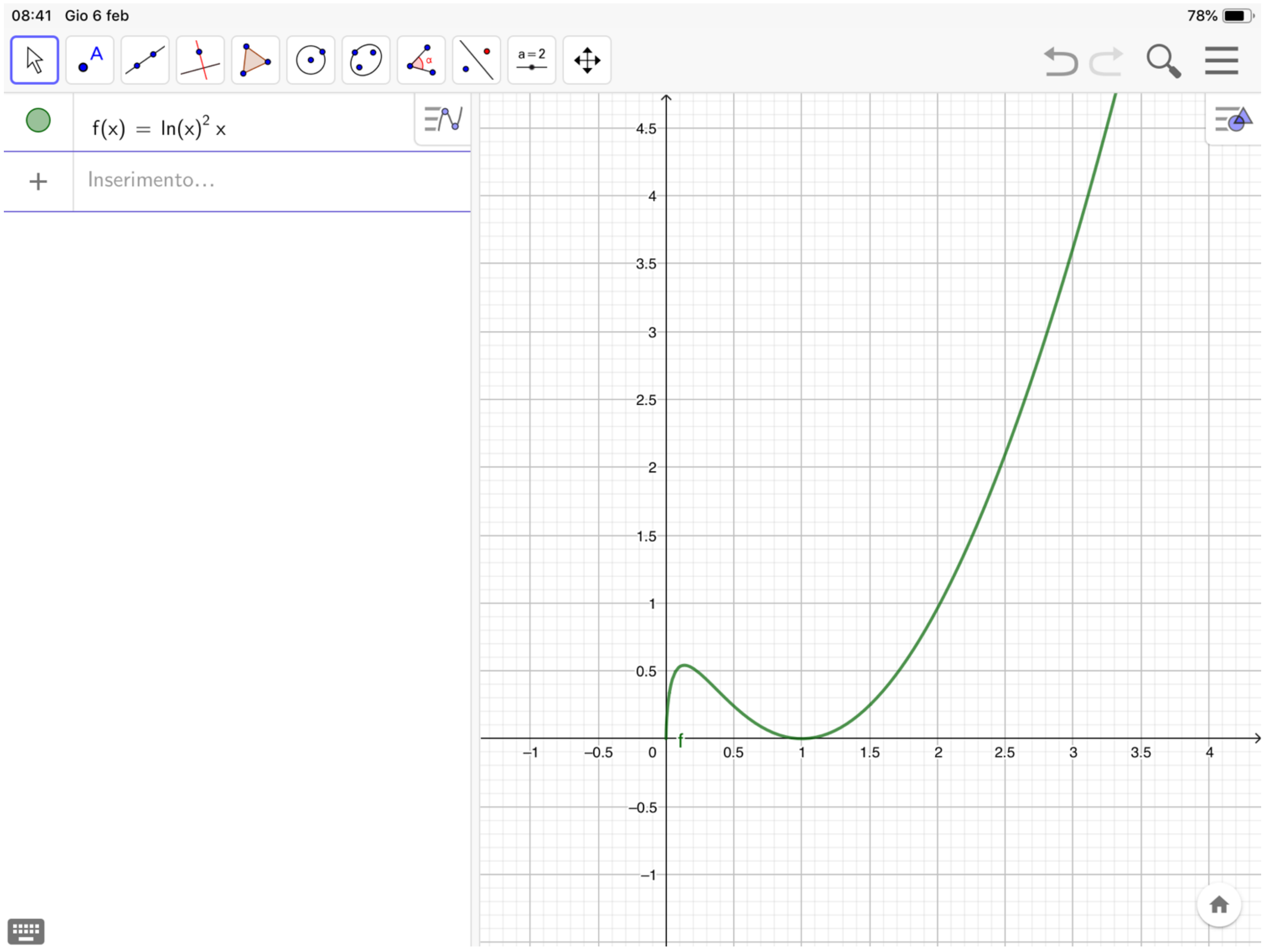
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln^2 x + 2\ln x) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \ln^2 x\left(1 + \frac{2}{\ln x}\right) =$$

$$= +\infty(1+0) = +\infty$$

Ciò significa che il grafico si "stacca" dall'origine con tangenza verticale.





Calcolo ora i punti in cui la tangente alla curva è perpendicolare alla retta $x+3y=3$, retta di coefficiente angolare $m=-\frac{a}{b}=-\frac{1}{3}$

Cerco quindi in quale punto la pendenza del grafico è l'antireciproco di $-\frac{1}{3}$, ovvero 3:

$$f'(x) \overset{!}{=} 3 \iff \ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0$$

$$\ln x = 1 \ \vee \ \ln x = \frac{c}{a} = -3$$

$$x_1 = e \quad \vee \quad x_2 = e^{-3}$$

$$y_1 = f(x_1) = e \implies P_1(e, e)$$

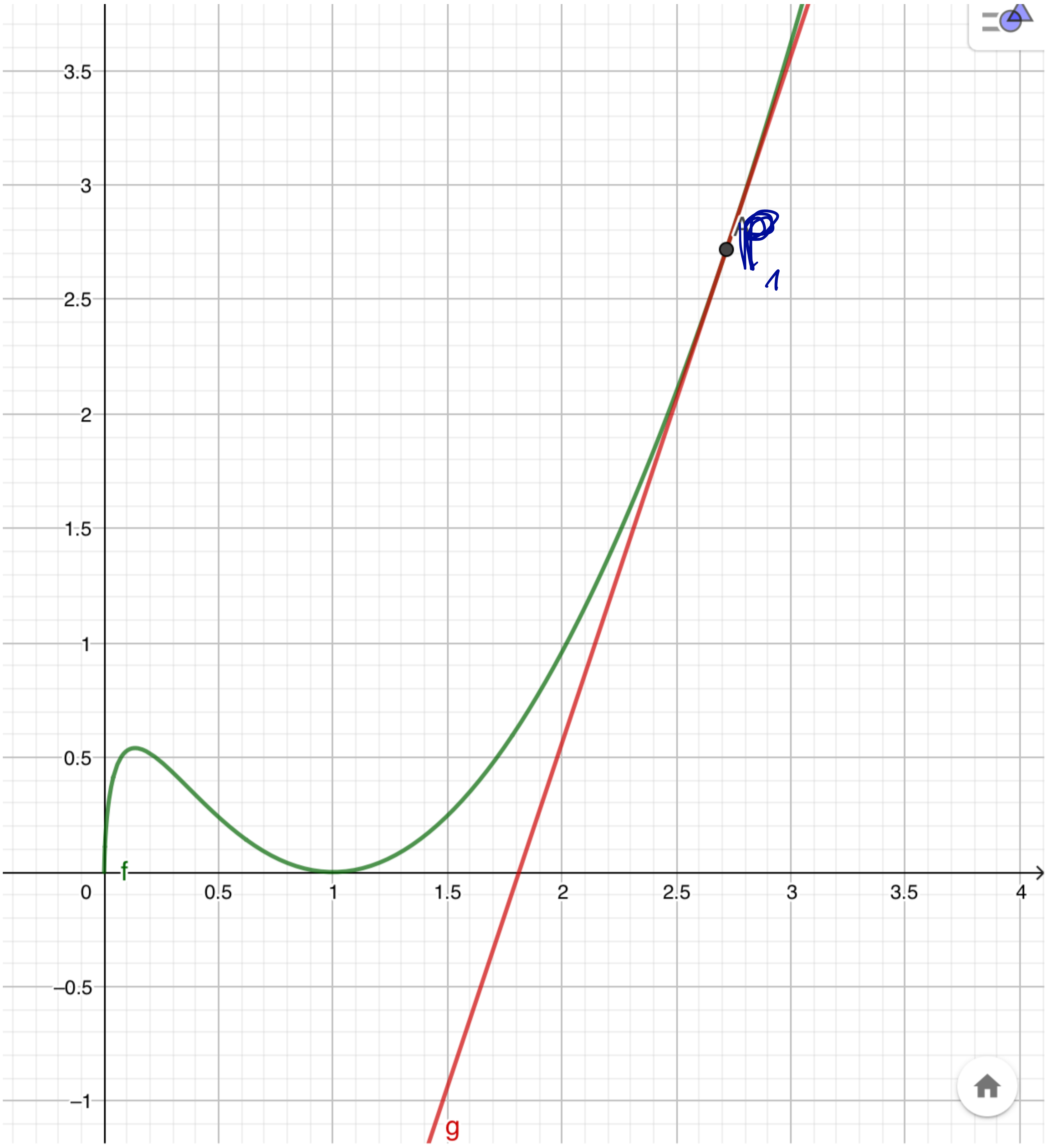
$$y_2 = f(x_2) = e^{-3}\cdot(-3)^2 = \frac{9}{e^3} \implies P_2\left(\frac{1}{e^3}, \frac{9}{e^3}\right)$$

P_1 è tra i due punti quello con ascisse maggiore; retta tangente:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$y - e = 3(x - e)$$

$$\boxed{y = 3x - 2e}$$



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
f
g
P
1

2) $\lim_{x \to 5^+} \frac{\ln(x^2-5x)}{\ln(x-5)} = \frac{-\infty}{-\infty}$ f.i.

$f(x) = \ln(x^2-5x)$ è definita in
$x<0 \vee x>5$ e

dunque in un intorno destro di $x=5$ ove è continua e derivabile.

$g(x) = \ln(x-5)$ è definita per le $x>5$ ed è ivi continua e derivabile

È possibile dunque applicare il teorema di De L'Hôpital, essendone verificate le ipotesi.

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{\ln(x^2-5x)}{\ln(x-5)} \underset{\text{De L'H.}}{\overset{(\infty/\infty)}{=}} \lim_{x \to 5^+} \frac{\frac{1}{x^2-5x} \cdot (2x-5)}{\frac{1}{x-5} \cdot 1} =$$

$$= \lim_{x \to 5^+} \frac{\cancel{x-5}}{x\cancel{(x-5)}} \cdot (2x-5) =$$
$$= \lim_{x \to 5^+} \frac{2x-5}{x} = \frac{5}{5} = 1$$

Poiché esiste il limite del rapporto delle derivate prime, si può concludere che $\exists$ anche il $\lim_{x \to 5^+} \frac{\ln(x^2-5x)}{\ln(x-5)} = 1$

---

3) $f(x) = \begin{cases} x^3+x & -2 < x \leq 0 \\ e^{-x}-1 & 0 < x < 2 \end{cases}$

f è continua e derivabile <u>almeno</u> in $]-2,0[\cup]0,2[$

perché per $f(x) = x^3+x$ è una fun algebrica razionale intera e dunque C^∞,

$f(x) = e^{-x}-1$ è una composizione di funi continue e derivabili.

Occorre studiare la continuità e derivabilità in $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^3+x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^{-x}-1) = 1-1=0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Poiché $f(0) = 0^3+0=0$,

risulta $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$,

ovvero f è continua anche in $x=0$. La continuità in $x=0$ garantisce la condizione necessaria per la derivabilità

Per analizzare la derivabilità in $x=0$, faccio uso del criterio di derivabilità, essendo verificate le ipotesi (f derivabile a sinistra e a destra di $x=0$)

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & -2 < x < 0 \\ -e^{-x} & 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (3x^2+1) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (-e^{-x}) = -1$$

Pertanto f non è derivabile in $x=0$ e presenta lì un punto angoloso

4) $f(x) = x^5 + x + 3$

Devo provare che f ha un unico zero in $\mathbb{R}$.

Per il teorema fondamentale dell'algebra il polinomio x^5+x+3 ha almeno uno zero reale, essendo di grado dispari (le radici complesse sono sempre in numero pari, se presenti)

Dunque l'$\exists$ di almeno una radice x_1 è assicurata.

Per provare l'unicità, procedo per assurdo, supponendo l'$\exists$ di almeno un'altra radice $x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 \neq x_2$.

Senza ledere la generalità posso supporre $x_1 < x_2$

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

$f(x)$ continua in $[x_1, x_2]$, derivabile in $]x_1, x_2[$

Per il teor. di Rolle dunque deve esistere $c \in]x_1, x_2[$ t.c.

$f'(c) = 0$, cioè deve esserci almeno un punto stazionario tra x_1 ed x_2.

Ma $f'(x) = x^4 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Da qui l'assurdo e quindi la certezza dell'unicità della radice.

5) $y = \dfrac{x^2+a}{x+b}$

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $x=-1$ e $x=2$ siano punti di massimo e minimo relativo rispettivamente è che essi siano stazionari.

$y'(-1)=0$

$y'(2)=0$

$$y'(x) = \frac{2x(x+b)-(x^2+a)\cdot 1}{(x+b)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2bx-a}{(x+b)^2}$$

$$y' = \frac{x^2+2bx-a}{(x+b)^2}$$

$y'(-1)=0 \iff 1-2b-a=0$ con $b \neq 1$

$y'(2)=0 \iff 4+4b-a=0$ con $b \neq -2$

$$-\begin{cases} 1-2b-a=0 \\ 4+4b-a=0 \end{cases}$$

$3+6b=0 \qquad b=-\frac{1}{2}$ accett. (perchè $b \neq 1 \wedge b \neq -2$)

$$\begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a=1-2b=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Occorre ora appurare il cambiamento di segno della derivata prima in un intorno destro e sinistro di $x=-1$ e $x=2$. Precisamente dovrà essere:

$$\begin{array}{ccc} + & | & - \\ & -1 & \\ \nearrow & & \searrow \end{array}$$

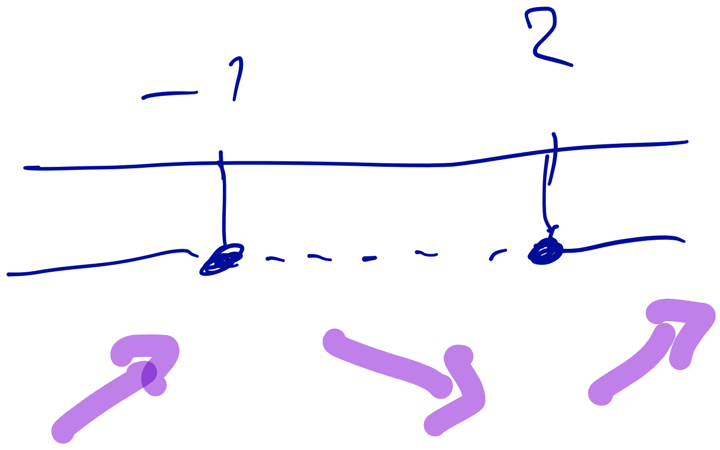
$$\begin{array}{ccc} - & | & + \\ & 2 & \\ \searrow & & \nearrow \end{array}$$

$$y = \frac{x^2+2}{x-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{2x\left(x-\frac{1}{2}\right) - \left(x^2+2\right)\cdot 1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{x^2-x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

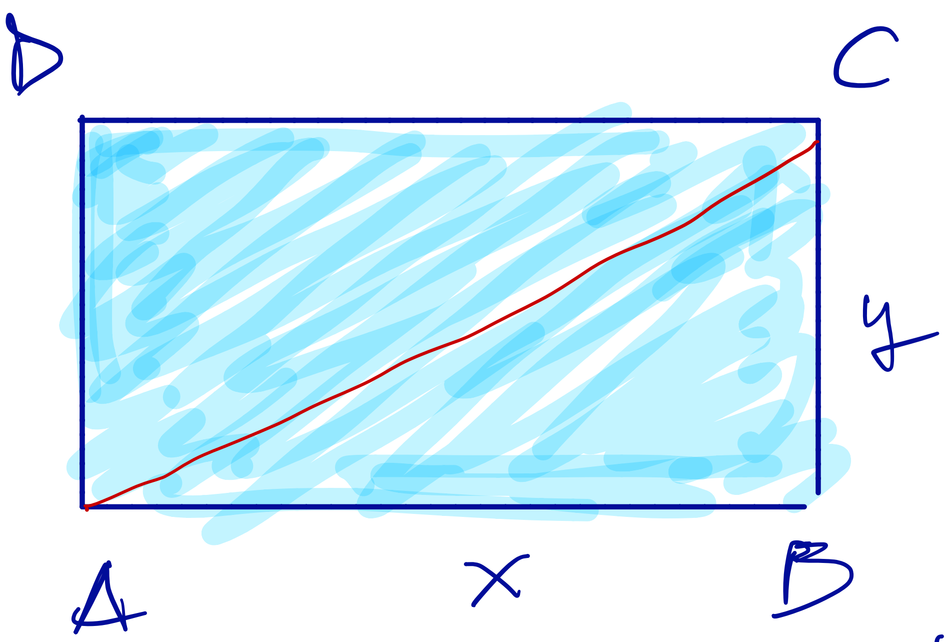
Segno di $y'(x) = \dfrac{x^2+x-2}{(x-\frac{1}{2})^2} \geq 0$

$$\iff \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Ora sì che si ha la certezza che i valori trovati per a e b, soddisfano le condizioni del quesito.

6)



Designazione incognita: $\overline{AB} =: x$ $\boxed{x>0}$

$$xy = 4a^2 \Rightarrow y = \frac{4a^2}{x}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16a^4}{x^2}} =$$

$$\underset{\sqrt{x^2}=|x|}{=} \frac{\sqrt{x^4+16a^4}}{|x|} \underset{x>0}{=} \frac{\sqrt{x^4+16a^4}}{x}$$

Funzione obiettivo

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{x^4+16a^4}$$

$x > 0$

$$y' = -\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt{x^4+16a^4} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1\cdot 4x^3}{2\sqrt{x^4+16a^4}} =$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x^4+16a^4} + \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{1 \cdot \cancel{4}^{2}\, x^{\cancel{3}^{2}}}{\cancel{2}\sqrt{x^4+16a^4}} =$$

$$= \frac{-\sqrt{x^4+16a^4}}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^4+16a^4}} =$$

$$= \frac{-(x^4+16a^4)+2x^4}{x^2\sqrt{x^4+16a^4}} =$$

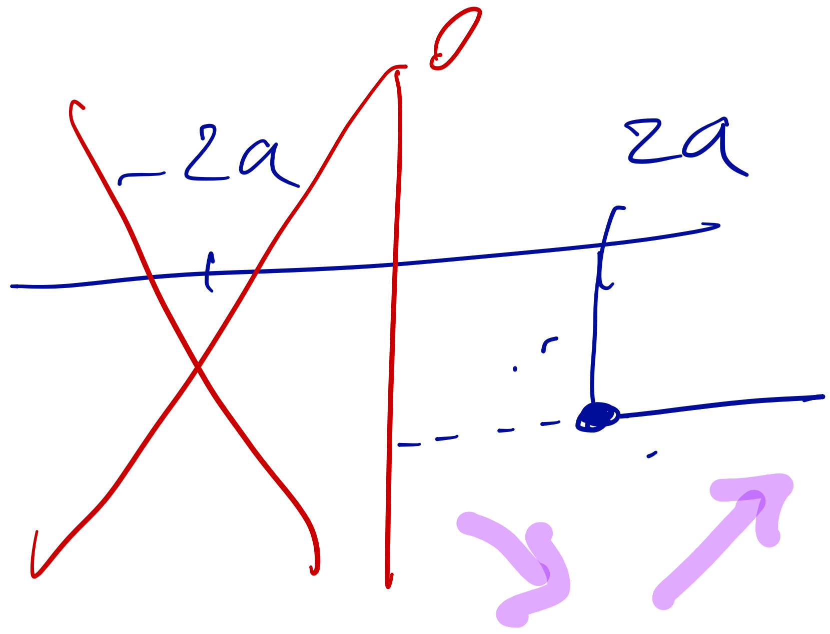
$$= \frac{x^4-16a^4}{x^2\sqrt{x^4+16a^4}}$$

$$y' \geq 0 \iff x^4-16a^4 \geq 0$$

$$(x^2-4a^2)(x^2+4a^2) \geq 0$$

$$\iff x^2-4a^2 \geq 0 \quad \left[x^2+4a^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \right]$$

$x^2 - 4a^2 \geq 0$



$x = 2a$ punto di minimo assoluto.

$$y = \frac{4a^{\cancel{2}}}{2a} = 2a$$

$\Rightarrow$ Il rettangolo con diagonale minima è dunque un quadrato.

7) $f(x) = 2\arcsin x - \arccos x\,(1-2x^2)$

Dominio

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le 1-2x^2 \le 1 \end{cases} \iff -2 \le -2x^2 \le 0$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \le x^2 \le 1$$

$$\Updownarrow$$

$$-1 \le x \le 1$$

$D = [-1, 1]$

Sia $x \ne \pm 1$:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(- \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} \right) \cdot (-4x) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}} =$$

$x \ne 0$

$$
= \begin{cases} \overset{0<x<1}{=} \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{2x}{x\sqrt{1-x^2}} = 0 \\[2ex] \underset{-1<x<0}{=} \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}
$$

Perciò $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]0,1[$

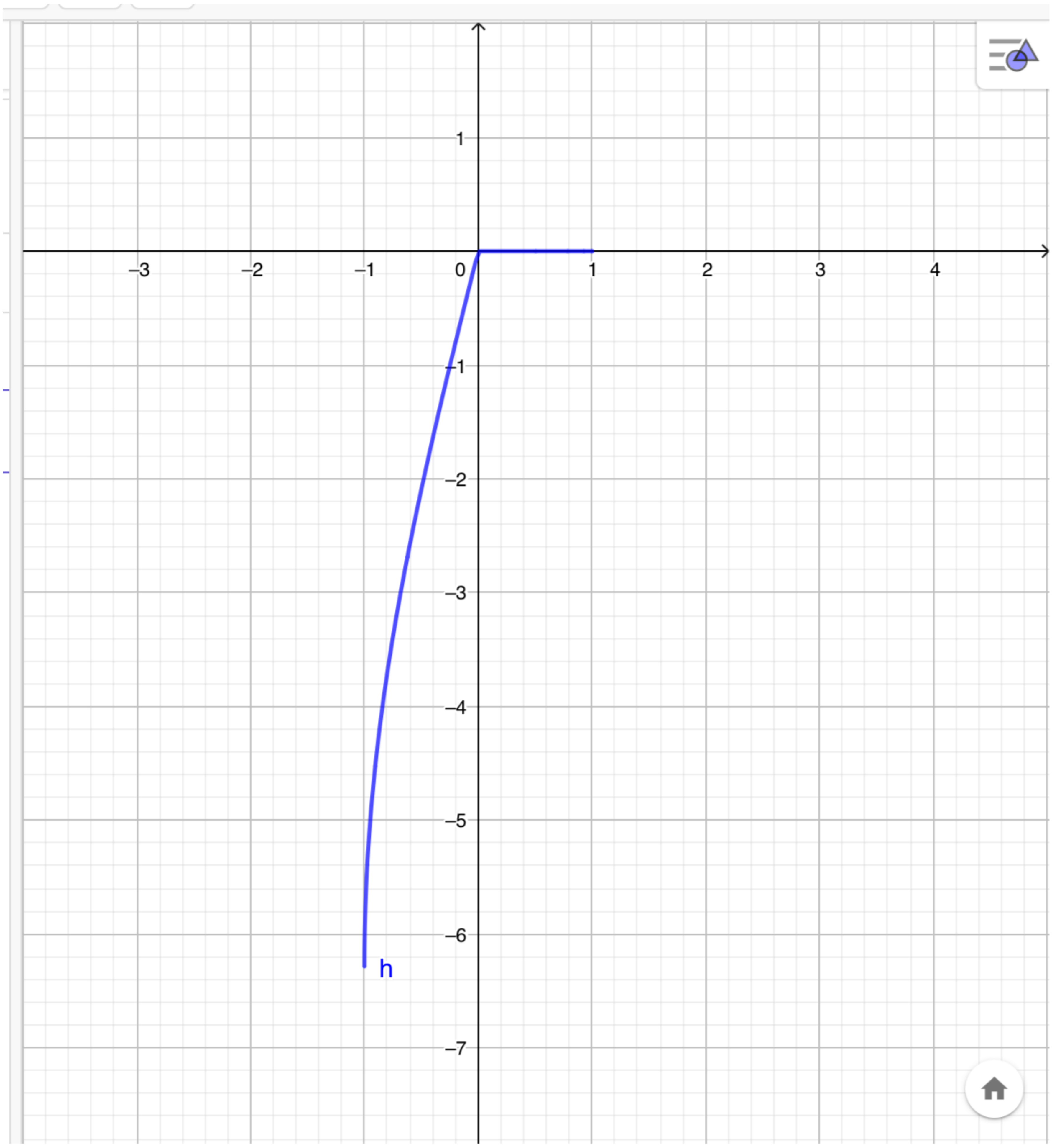
e, per una conseguenza del teorema di Lagrange,

$\exists\, c \in \mathbb{R} / \; f(x) = c \quad \forall x \in [0,1]$

(la funzione è costante in $[0,1]$.)

Per determinare il valore costante, basta calcolare

$$
f(0) = 2\arcsin 0 - \arccos(1-0) = \\
= 2 \cdot 0 - 0 = 0.
$$



Prof. Ugo [illegible]