CRISI DELLA SIMULTANEITA'

Appunti di Ugo Morra.

Consideriamo due sistemi di riferimento con una sola dimensione spaziale in moto relativo l'uno rispetto all'altro e le cui origini siano coincidenti all'istante t=t'=0. La velocità v è quella con cui S' si muove rispetto ad S (supponiamo verso destra).

Le equazioni

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

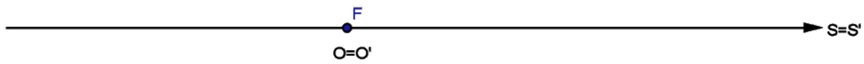
rappresentano le trasformazioni di Lorentz che fanno passare da un sistema all'altro.

Consideriamo due sistemi S ed S' composti ora da tre assi, con le origini sovrapposte all'istante iniziale t=t'=0 e che si muovono relativamente con velocità v nella direzione dell'asse x (e quindi x'). Le trasformazioni di Lorentz diventano:

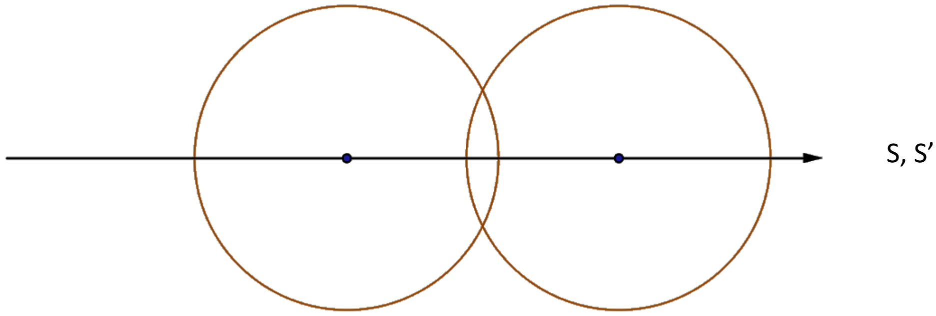
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

Supponiamo ora che vi sia un flash fissato all'origine del sistema S' (e quindi in quiete rispetto ad S'). All'istante iniziale t=0 (quando le origini di S ed S'coincidono) viene emesso un lampo luminoso. Quali sono le osservazioni fatte dai due sistemi di riferimento S ed S' relativamente alla propagazione del segnale luminoso?

Vediamo in figura:



Situazione all'istante t=t'=0. Il flash, collocato in O', sta in questo preciso istante generando un lampo di luce.



Situazione all'istante generico t. Il lampo, collocato in O', ha generato un fronte d'onda che viene valutato diversamente dai due sistemi di riferimento.

L'onda luminosa si propaga secondo un fronte d'onda sferico nelle tre dimensioni dei due sistemi di riferimento. S vede l'onda che si espande come una superficie sferica con centro in O, mentre S' osserva una superficie sferica con centro in O'. Infatti, mentre S' si sposta, l'onda sferica si espande.

L'equazione del fronte d'onda per S è ovviamente: $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$,

mentre per S' è $(x^{'})^2 + (y')^2 + (z^{'})^2 - c^2(t')^2 = 0,$

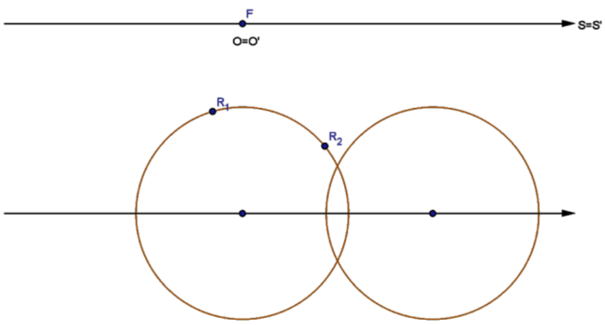
(si è tenuto presente che la velocità della luce è la stessa nei due sistemi di riferimento, per il II postulato della relatività ristretta).

Possiamo fare alcune osservazioni:

1) Crisi della simultaneità

Se consideriamo due rivelatori di segnale luminoso, uno posto in R_1 e l'altro in R_2 (vedi figura sotto), un osservatore solidale al sistema di riferimento S giudica simultanei i due segnali in R_1 e in R_2, poiché $\overline{SR_1} = \overline{SR_2} = ct$. Ciò significa che i due rivelatori R_1 e R_2 scattano, per S, contemporaneamente.

Un osservatore posto in S' si trova in disaccordo: infatti vedrà scattare prima il rivelatore in R_2 e poi quello in R_1.



2) Le trasformazioni di Lorentz fanno corrispondere i due fronti d'onda. Infatti se trasformiamo il I fronte d'onda, utilizzando la sostituzione associata ottenuta per inversione fisica, si ottiene:

$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \longrightarrow$

…OMESSA… (DOVETE DIMOSTRARLO VOI PER ESERCIZIO)

…. Ovvero … $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = 0.$

3) Dalle equazioni dei due fronti d'onda emerge che deve essere:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2$$

In effetti, i passaggi matematici fatti nel punto 2, dimostrano che la quantità

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

è invariante per trasformazioni di Lorentz. Tale quantità è il quadrimodulo.

Anche dal punto di vista matematico si poteva sostenere la presenza di un invariante. Il motivo è che la matrice della trasformazione di Lorentz (consideriamo quella 4x4) è

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

il cui determinante è uguale, come si può verificare con il teorema di Laplace, a

$$\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$$

Dunque il determinante è costante (al variare di v), perciò ci si aspetta un invariante (come nelle isometrie, in cui l'invariante è la distanza tra due punti o equivalentemente il suo quadrato, ovvero $x^2 + y^2 + z^2$). Tale invariante è appunto il qudrimodulo.