Scheda di lavoro per la classe IV
Trasformazioni lineari

Sono raccolti alcuni problemi ed alcuni quesiti proposti nelle ultime edizioni degli esami di Stato che riguardano lo studio delle trasformazioni geometriche.

ANNO 2005 PNI quesito 3

Si determinino le equazioni di 2 simmetrie assiali σ e φ la cui composizione $\sigma \circ \varphi$ dia luogo alla traslazione di equazione $\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$. [*R: si tratta di due simmetrie rispetto ad assi paralleli alla bisettrice del I e III quadrante* *σ:* $\begin{cases} x' = y - k \\ y' = x + k \end{cases}$ *e φ:* $\begin{cases} x' = y - k + \sqrt{5} \\ y' = x + k - \sqrt{5} \end{cases}$ *con k parametro reale*]

ANNO 2005 PNI quesito 6

Le rette *r* e *s* di equazione $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ. [*R:* $\begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases}$]

ANNO 2004 PNI suppletiva quesito 8

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (0xy) sono assegnate le affinità di equazioni $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = \frac{1}{2}bx - 2 \end{cases}$. Tra di esse determinare quella che trasforma (1,0) in (1,-1) e stabilire se ammette rette unite.

[*R:* $\begin{cases} X = x + 2y \\ Y = x - 2 \end{cases}$ *; rette unite* $y = -x + 2$ *e* $y = \frac{1}{2}x - 1$]

ANNO 2004 PNI quesito 10

Nel piano è data la trasformazione $\begin{cases} x \to x\sqrt{3} - y \\ y \to x + y\sqrt{3} \end{cases}$. Di che tipo di trasformazione si tratta? [*R: similitudine di rapporto k = 2*]

ANNO 2003 PNI suppletiva quesito 8

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono date le affinità di equazioni $\begin{cases} x' = (a+1)x - by + a \\ y' = (a-1)x + 2by - 1 \end{cases}$ con *a* e *b* parametri reali. Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e trovare, in questo caso, il punto unito. [*R:* $a = 3 \wedge b = 2$ *; punto unito* $\left(-\frac{7}{13}; \frac{9}{13}\right)$]

ANNO 2000 PNI Problema 2

Nel piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani (Oxy) sono assegnati i punti :
A(0;2), B(1;1), C(1;0).

a) Trovare l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB.
b) Determinare le equazioni dell'affinità α che come unti uniti O e C e trasforma il punto B nel punto A.
c) Calcolare l'area del triangolo CAA' dove A' è il punto trasformato di A nell'affinità *a*.
d) Stabilire se l'affinità ammette altri punti uniti, oltre ad O e C, e trovare le sue rette unite.

e) Stabilire quali fra le rette unite trovate risultano tangenti o esterne a γ.

[*R: a)* $x^2+y^2+2(1-\sqrt{2})x+-2y+1=0$ *; b)* $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=2y \end{cases}$ *; c)1; d) sono uniti tutti i punti dell'asse delle ascisse, le rette unite oltre all'asse delle x (retta di punti uniti)sono le rette con m = - 1; s) sono le rette* $y=-x+q$ *con* $q\le -2$ *e* $q\ge 2(1-\sqrt{2})$]

ANNO 1999 PNI Problema 3

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono dati i punti P(x;y), A (x';y'), B(x''; y'') , P' (X;Y) legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x'=2x \\ y'=2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x''=-y' \\ y''=x' \end{cases} \qquad \begin{cases} X=x''+2 \\ Y=y''-1 \end{cases}$$

Il candidato:

a) dica la natura delle trasformazioni T_1, T_2, T_3 rappresentate rispettivamente dalle predette equazioni;
b) determini la trasformazione che fa passare da P a P';
c) studi la trasformazione T enunciandone le proprietà e determinandone, in particolare, gli eventuali elementi uniti;
d) considerati i punti C(3;0), D(0; $\sqrt{3}$), E (0; $-\sqrt{3}$) detti γ la circonferenza per tali punti, *a* la retta CD, γ' ed *a*' i trasformati di γ ed *a* mediate T, determini l'area delle regioni di piano delimitate da γ' ed *a*';
e) determini il perimetro delle stesse regioni.

[*R: T_1 omotetia con centro O e rapporto 2; T_2 rotazione di +90° con centro in O; T_3 traslazione di vettore* $\vec{v}=(2;-1)$ *, b) T =* $\begin{cases} X=-2y+2 \\ Y=2x-1 \end{cases}$ *c)T* similitudine *di rapporto 2; punto unito di T :* $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ *, non ci sono rette unite; d)* $\frac{4}{3}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$ *e* $\frac{4}{3}\left(8\pi+3\sqrt{3}\right)$ *e)* $\frac{4}{3}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$ *e* $\frac{4}{3}\left(4\pi+3\sqrt{3}\right)$]

ANNO 1996 PNI Problema 2

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani *Oxy* si considerino le trasformazioni di equazioni:

$\begin{cases} X=x+y-1 \\ Y=\alpha x+\beta y+4 \end{cases}$ essendo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}<0$ che trasformano il punto *P(x ; y)* nel punto *P' (X ; Y).*

Il candidato:

a) determini α e β in modo che la trasformazione muti cerchi in cerchi e indichi con T tale trasformazione;
b) determini gli elementi che si trasformano in se stessi nella trasformazione T;
c) verifichi che il rapporto dei segmenti corrispondenti *PQ* e *P'Q'* è costante e determini il valore di tale rapporto;
d) dica la natura di T;
e) detta σ la regione finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $x^2-2x-y=0$ e dalla bisettrice del primo quadrante e detta Δ l'area di σ e Δ' l'area della regione σ', corrispondente di σ nella trasformazione T, calcoli i valori di Δ e Δ';

solo indirizzo scientifico

f) detti *p* e *p'* i perimetri di σ e σ', determini il valore del rapporto $\frac{2p+p'}{p}$.

[*R: a)* $\alpha=1,\beta=-1$*;b)(–2 ; 1) punto unito; c)* $\sqrt{2}$ *; d) similitudine contraria ottenuta, ad esempio, applicando nell'ordine una simmetria rispetto alla retta* $y=(\sqrt{2}-1)x$ *e una omotetia di rapporto* $\sqrt{2}$ *e centro (1+* $\sqrt{2}$ *; – 4 – 4* $\sqrt{2}$ *); e) Δ = 9/2, Δ' = 9: f) 2 +* $\sqrt{2}$]