METODO DEL RADDOPPIAMENTO DEL PASSO

(ABBINABILE SOLO ALL'INTEGRAZIONE NUMERICA DI SIMPSON)

lizzare il metodo seguente (*principio di* RUNGE).
Si calcola il valore approssimato dell'integrale dato, mediante la formula di SIMPSON, nella quale si pone:

$$h_1 = \frac{b-a}{2t}.$$

Sia I_1 il valore così trovato dell'integrale.
Poi, si raddoppia il «*passo*» e si applica di nuovo la formula di SIMPSON, questa volta prendendo:

$$h_2 = \frac{b-a}{t},$$

Sia I_2 il nuovo valore dell'integrale.
È stato valutato che l'errore della seconda tappa è approssimativamente 16 volte più grande dell'errore della prima tappa.
Per questo motivo l'errore compiuto nella prima tappa (per il passo h_1) sarà approssimativamente dato dalla formula:

$$e_s = \frac{|I_1 - I_2|}{15}.$$

Questo metodo può essere chiamato: valutazione dell'errore della formula di SIMPSON per «*raddoppiamento del passo*» di calcolo.
Vediamo un *esempio*:

2 *Calcolare, con la formula di* SIMPSON, *l'integrale:* $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$, *ponendo* $n = 8$ *ed effettuando i calcoli a sei decimali.*
Valutare l'errore del risultato ottenuto con il metodo del raddoppiamento del passo di calcolo.

Ponendo $h_1 = 0,125$, costruiamo la tabella dei valori della funzione integranda:

x	y	x	y
$x_0 = 0$	$y_0 = 1,00000$	$x_5 = 0,625$	$y_5 = 0,719101$
$x_1 = 1,125$	$y_1 = 0,984615$	$x_6 = 0,750$	$y_6 = 0,640000$
$x_2 = 0,250$	$y_2 = 0,941176$	$x_7 = 0,875$	$y_7 = 0,566371$
$x_3 = 0,375$	$y_3 = 0,876712$	$x_8 = 1$	$y_8 = 0,500000$
$x_4 = 0,500$	$y_4 = 0,800000$		

Calcoliamo ora, con la formula di SIMPSON, il valore di I_1, relativo al passo $h_1 = 0,125$; si ha:

$$I_1 = \frac{h_1}{3}[y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)] = \frac{0,125}{3}\cdot[1,000000 + 0,500000 +$$

$$+ 4\cdot(0,984615 + 0,876712 + 0,719101 + 0,566371) + 2\cdot(0,941176 + 0,800000 + 0,640000)] =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot 9,424704 = 0,785392.$$

Raddoppiando il passo, cioè ponendo: $h_2 = 0,250$, si trova:

$$I_2 = \frac{h_2}{3}[y_0 + y_8 + 4(y_2 + y_6) + 2y_4] = \frac{0,25}{3}\cdot[1,000000 + 0,500000 +$$

$$+4(0,941176 + 0,640000) + 2\cdot 0,800000] = \frac{1}{12}\cdot 9,424704 = 0,785392.$$

Da cui: $e_s \approx \frac{I_1 - I_2}{15} = \frac{0,000006}{15} \approx 0,0000004$. Così, le sei cifre decimali di I_1 devono essere esatte.

06.05.201