VERIFICA DI MATEMATICA

CLASSE VB

LICEO SCIENTIFICO R. NUZZI DI ANDRIA

26.10.20019

Prof. U. Morra

Il fumo talvolta offusca le idee, soprattutto quelle matematiche.

1) Calcolo dei limiti:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^3-5x-12}{x^2-6x+9},\quad \lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{5x-1}}{2-x},\quad \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3+\cos x)}{x^3},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\quad \lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+x^2}{x^2}\right),\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\log(x^3+5)-\log 2x\right]$$

2) Provare che la funzione $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ è infinitesima per $x\to\infty$. Quale informazione si acquisisce da tale risultato? Riportala sul piano cartesiano.

3) Determina il dominio, il segno e gli asintoti della seguente funzione $f(x)=\sqrt{\frac{9x-9}{x+2}}$. Riporta sul grafico le informazioni ottenute.

(COMPITO DI 1 ORA)

1) $$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^3-5x-12}{x^2-6x+9} \qquad \frac{0}{0}$$

	1	0	-5	-12
3		3	9	12
	1	3	4	//

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+4)}{(x-3)^{\cancel{2}}} = \frac{22}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{5x-1}}{2-x} = \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{9-5x+1}{(2-x)(3+\sqrt{5x-1})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{5\cancel{(2-x)}}{\cancel{(2-x)}(3+\sqrt{5x-1})} = \frac{5}{6}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x+\sqrt{x^2+3x}\right) = -\infty+\infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-3x}{x-\sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{x+x\sqrt{1+\frac{3}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right)} = \frac{-3}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\cos x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}\left(3+\cos x\right) =$$

$= 0$ perchè prodotto di una infinitesima $\left(\frac{1}{x^3}, \text{ per } x\to+\infty\right)$ per una limitata $\Big(3+\cos x$. Infatti

$$-1 \le \cos x \le 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$2 \le 3+\cos x \le 4, \quad \forall x\in\mathbb{R}\Big)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x+\sin^2 x)}{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x+x^2}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \ln \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\cancel{x^2}} = \ln\left(\frac{1}{\infty}+1\right) =$$

per la continuità di $\ln x$

$$= \ln 1 = 0$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3}\right) = +\infty - \infty \quad \text{f.i.}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2-2}{x^3} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\log(x^3+5)-\log 2x\right] =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^3+5)-\log 8x^3}{3} =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\frac{x^3+5}{8x^3}}{3} =$$

$$=\frac{1}{3}\log\frac{1}{8} = \log\frac{1}{2} = -\log 2$$

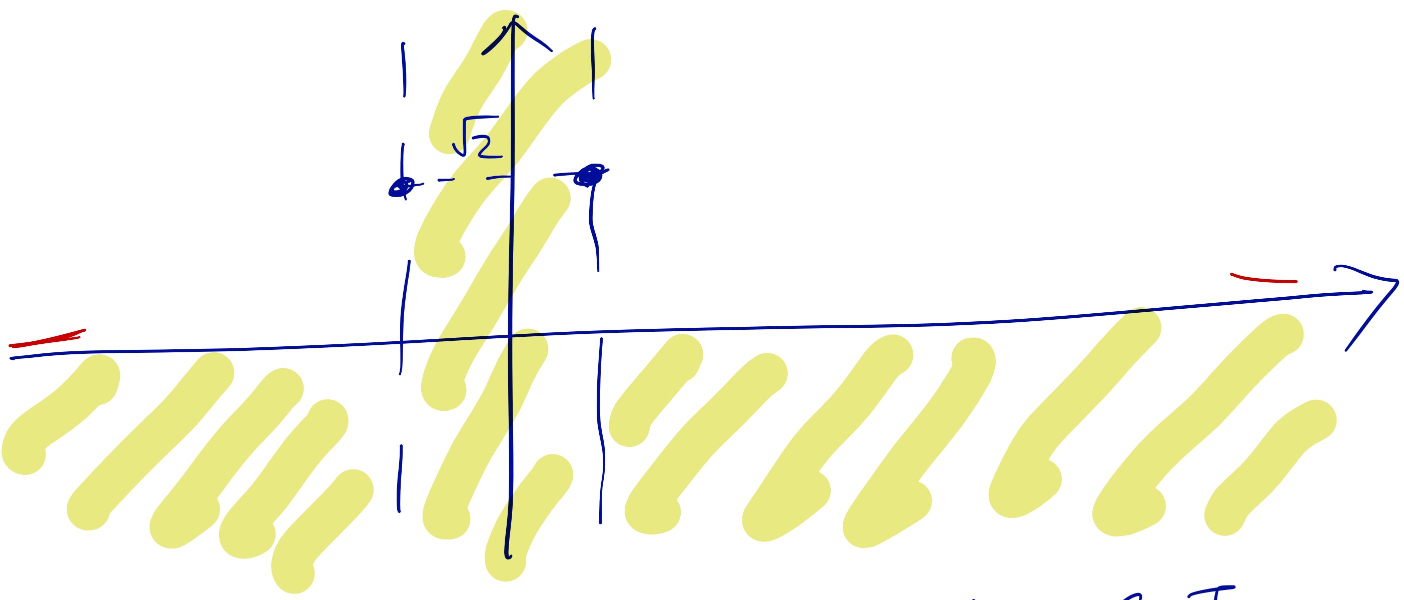
2) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ $\quad D_f =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

$\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} =$$

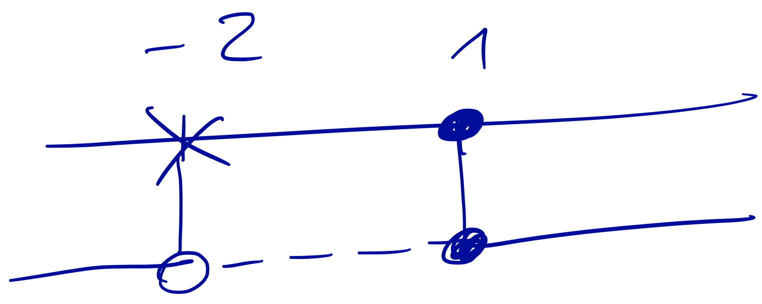
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{}+\sqrt{}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$\Rightarrow f$ <u>è infinitesima</u> per $x \to \infty$



$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2-1} \quad \forall\, x \in I_\infty$

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{9x-9}{x+2}}$



C.E. $\dfrac{9x-9}{x+2}\geq 0$

$D =]-\infty,-2[\cup [1,+\infty[$

Segno: $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in D$

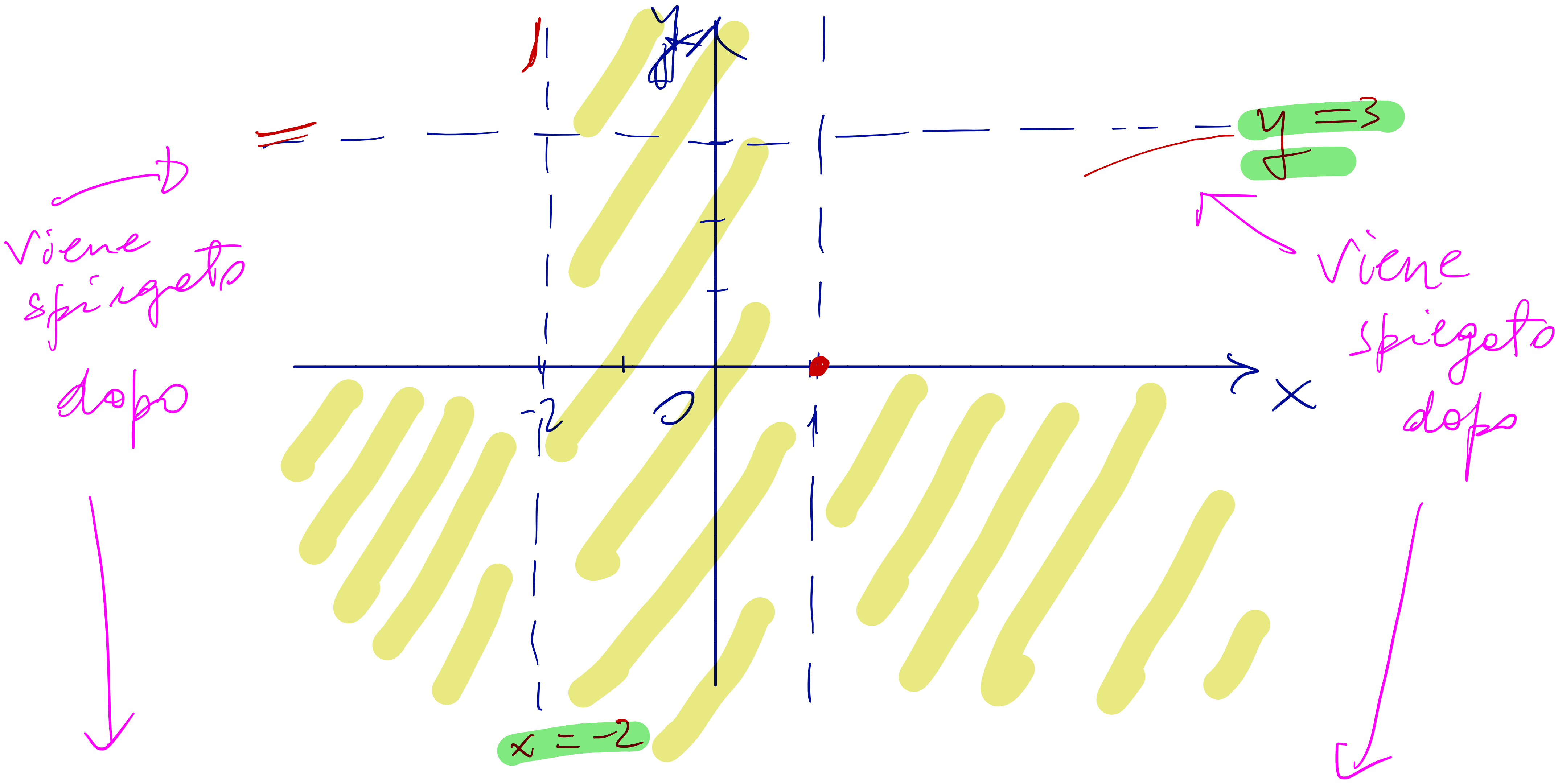
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{9x-9}{x+2}} = \sqrt{9}=3$$

$\Rightarrow$ la retta $y=3$ è asintoto orizzontale per $x\to\pm\infty$

Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \sqrt{\frac{-27}{0^-}} = \sqrt{+\infty}=+\infty$$

$\Rightarrow$ la retta $x=-2$ è asintoto verticale.



Eventuali intersezioni della funzione con l'asintoto orizzontale $y=3$:

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = \sqrt{\dfrac{9x-9}{x+2}} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{9x-9}{x+2}} = 3 \iff \begin{cases} \dfrac{9x-9}{x+2} = 9 \\ x \in D_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{9x} - 9 = \cancel{9x} + 18 \\ x \in D_f \end{cases}$$ (perché $x \neq -2$, con $x \in D_f$!)

$$\begin{cases} -9 = 18 \\ x \in D_f \end{cases}$$ assurdo $\Rightarrow \nexists$ intersezioni,

per cui...

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3^+ \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3^-$$