TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE ISOMETRIE

SIMMETRIE ASSIALI: TRATTAZIONE SINTETICA

Appunti scritti dal prof. U. Morra

DEFINIZIONE.

Data una retta r nel piano, è detta simmetria assiale (o riflessione) di retta r la applicazione che associa a ciascun punto P del piano il punto P’ in modo tale che l’asse del segmento PP’coincida con r.

Teorema.

Le simmetrie centrali sono isometrie.

Dim: bisogna dapprima provare che le simmetrie assiali sono delle trasformazioni geometriche, ovvero che la corrispondenza del piano in sé che le definisce è iniettiva e suriettiva. Supponiamo per assurdo che la traslazione non sia iniettiva, cioè che non sia vero che

$\forall\, P, Q \text{ del piano con } P \neq Q \text{ risulta } P' \neq Q'$.

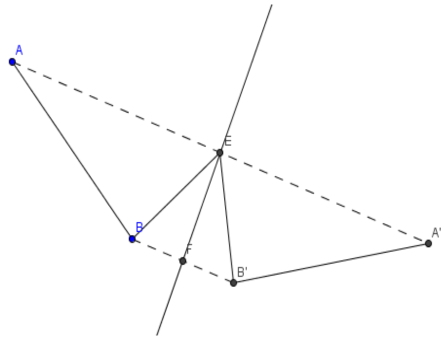
Negare l’affermazione precedente equivale a considerare vera la seguente proposizione:

$\exists P, Q \text{ del piano con } P \neq Q \text{ per cui risulta } P' = Q'$.

Supponiamo quindi per assurdo che due punti P e Q abbiano stessa immagine in P’. Se così fosse i segmenti PP’ e QP’ avrebbero in comune un estremo (il punto P’), ma non l’altro. L’assurdo sta nel fatto che i due segmenti avrebbero lo stesso asse (la retta r), pur avendo un estremo coincidente e l’altro no.

Osserviamo inoltre che ogni punto P’ del piano ha una preimmagine. Essa coincide infatti con il punto P scelto in modo tale che il segmento PP’ abbia come asse la retta r. Ciò prova la suriettività e quindi la biunivocità della corrispondenza. Pertanto la simmetria assiale è una trasformazione geometrica.

Dimostriamo ora che si tratta di una isometria, ovvero di una trasformazione che agisce sui segmenti non alterandone la lunghezza. Deve essere vero che $\forall\, A, B \;\; \overline{AB} = \overline{A'B'}$.



BFE≅B'FE $\begin{cases} FE \text{ in comune} \\ BF \cong B'F \\ \widehat{BFE} \cong \widehat{B'FE} = \text{angolo retto} \end{cases}$ $\Big\}$ *perchè* B *e* B' *si corrispondono*

(1° criterio di congruenza dei triangoli)

In particolare risulta $BE = B'E$ e $\widehat{BEF} = \widehat{B'EF}$

Dall'ultima congruenza segue che $\widehat{BEA} = \widehat{B'EA'}$, poiché angoli complementari di angoli congruenti. Pertanto

BEA≅B'EA' $\begin{cases} BE = B'E \text{ per dim. precedente} \\ AE \cong A'E \textit{ perchè } A \textit{ e } A' \textit{ si corrispondono} \\ \widehat{BEA} = \widehat{B'EA'} \quad \text{per dim. precedente} \end{cases}$

(1° criterio di congruenza dei triangoli)

Segue, in particolare, che $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Q.E.D.

Elementi uniti nella simmetria assiale

Punti uniti: la retta r di simmetria

Rette unite $\begin{cases} \text{puntualmente : la retta r} \\ \\ \quad \text{globalmente : tutte quelle perpendicolari ad r (formano un fascio improprio)} \end{cases}$

____

Le simmetrie assiali sono trasformazioni geometriche indirette ed involutorie.

La direzione delle rette <u>non è conservata</u> nelle simmetrie assiali.

Def. Una figura ha un asse di simmetria r se è unita nella simmetria assiale rispetto alla retta r.

Teorema (fondamentale delle isometrie).

Ogni isometria è composizione di al più tre simmetrie assiali. (Dimostrazione omessa)

OSSERVAZIONI

La composizione di un numero pari di trasformazioni indirette è una trasformazione diretta.

La composizione di un numero dispari di trasformazioni indirette è una trasformazione indiretta.

Poiché le simmetrie assiali sono indirette, dal teorema precedente segue che:

un'isometria è
- diretta, se composizione di un numero pari di riflessioni
- indiretta, se composizione di un numero dispari di riflessioni

Le isometrie si dividono in due sottoinsiemi: le isometrie pari e le isometrie dispari.

Le isometrie pari vengono così denominate perché risultano il composto di un numero pari di riflessioni.

Ogni isometria pari si riduce a una simmetria centrale, una traslazione o a una rotazione.

Le isometrie dispari vengono così denominate perché risultano il composto di un numero dispari di riflessioni. L'insieme delle isometrie dispari contiene i sottoinsiemi delle simmetrie assiali e delle cosiddette glissosimmetrie, definite - lo vedremo più avanti - come il composto di una traslazione e di una simmetria assiale, il cui asse è parallelo al vettore che individua la traslazione.