TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE ISOMETRIE

SIMMETRIE CENTRALI: TRATTAZIONE SINTETICA

Appunti scritti dal prof. U.Morra

DEFINIZIONE.

Fissato un punto C nel piano, è detta simmetria centrale di centro C la corrispondenza che associa a ciascun punto P del piano il punto P' in modo tale che il punto medio del segmento PP' coincida con C.

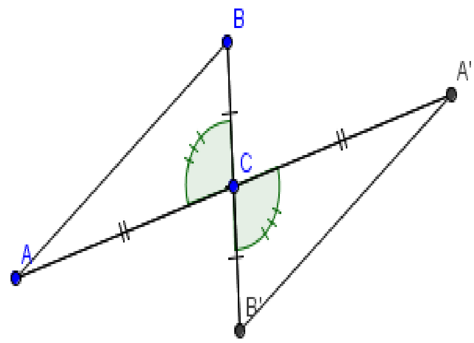
Teorema.

Le simmetrie centrali sono isometrie.

Dim: bisogna dapprima provare che le simmetrie centrali sono delle trasformazioni geometriche, ovvero che la corrispondenza del piano in sé che le definisce è iniettiva e suriettiva. Per l'iniettività si può osservare che presi due punti P e Q aventi la stessa immagine P', i segmenti PP' e QP' hanno in comune il punto medio C e l'estremo P'. Pertanto i due segmenti sono coincidenti e dunque P=Q.

Osserviamo inoltre che ogni punto P' del piano ha una preimmagine. Essa coincide infatti con il punto P scelto in modo tale che il segmento PP' abbia come punto medio C. Ciò prova la suriettività e quindi la biunivocità della corrispondenza. Pertanto la simmetria centrale è una trasformazione geometrica.

Dimostriamo ora che si tratta di una isometria, ovvero di una trasformazione che agisce sui segmenti non alterandone la lunghezza. Deve essere vero che $\forall\, A, B\ \ \overline{AB} = \overline{A'B'}$.



ABC≅A'B'C $\begin{cases} CA \cong CA' \, perch\grave{e}\ A\ e\ A' si\ corrispondono \\ BC \cong B'C\ perch\grave{e}\ B\ e\ B' si\ corrispondono \\ \widehat{ACB} \cong \widehat{A'CB'}\ perch\grave{e}\ opposti\ al\ vertice \end{cases}$

(1° criterio di congruenza dei triangoli)

In particolare risulta $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Q.E.D.

Elementi uniti nella simmetria centrale

Unico punto unito: il centro C di simmetria (lapalissiano)

Rette unite $\begin{cases} \text{puntualmente : non esistono} \\ \text{globalmente : tutte quelle passanti per C (costituiscono un fascio proprio)} \end{cases}$

____

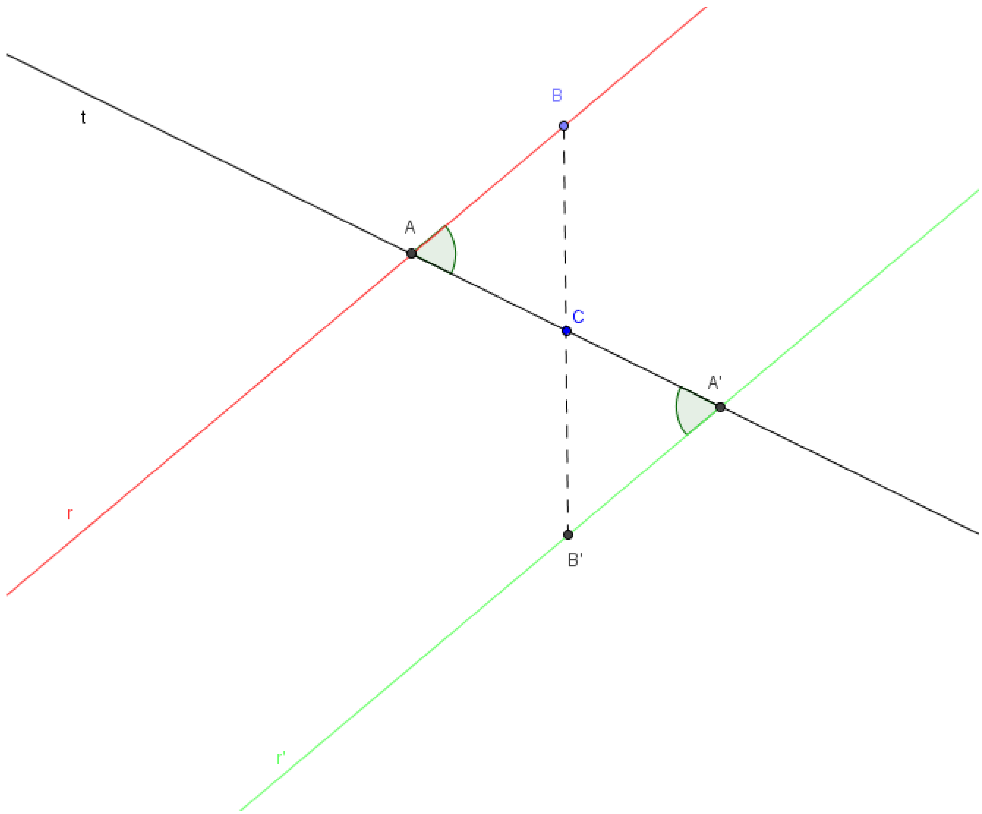
Le simmetrie centrali conservano la direzione.

Vale infatti il seguente

Teorema:

Rette che si corrispondono in una simmetria centrale sono parallele.

Dim: consideriamo una generica retta r del piano e proviamo che la sua trasformata r' nella simmetria centrale è parallela ad r. Se la retta r contiene il centro C di simmetria, la sua trasformata r' coincide con essa e pertanto conserva la direzione. Escluso questo caso banale, rimane da prendere in considerazione una retta qualunque non passante per C, come quella rappresentata in figura.



Sia t una retta generica per C, non parallela ad r, che taglia in A la retta r e in A' la sua trasformata r'. Poiché la retta t è globalmente unita rispetto alla simmetria (contiene C), il trasformato di A è proprio A' (l'incidenza di rette è una proprietà affine).

Consideriamo ora un altro punto B di r, al quale corrisponde B' su r'. I triangoli ABC e A'B'C sono isometrici per il III criterio di congruenza. Infatti $CA \cong CA'$, $CB \cong CB'$ perché A, A' e B, B' si corrispondono nella simmetria centrale, mentre $AB \cong A'B'$ perché la simmetria centrale è un'isometria. In particolare risulta $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C}$. L'ultima coppia di angoli costituisce una coppia di angoli alterni interni delle rette r ed r' tagliate dalla trasversale t. Pertanto $r \parallel r'$.

Q.E.D.

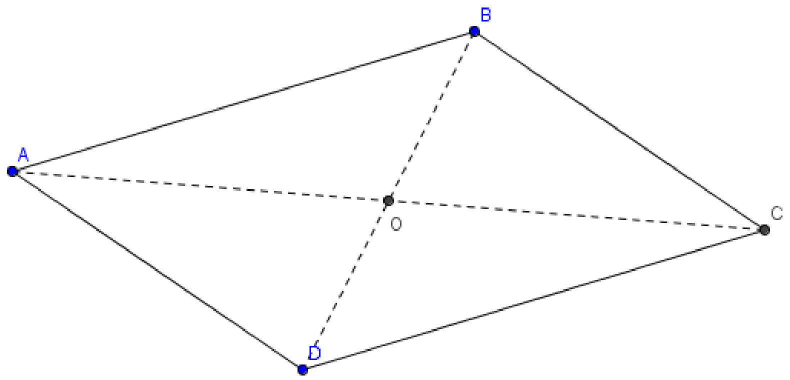
OSSERVAZIONI:

1)Le simmetrie centrali sono trasformazioni involutorie.

2) Le simmetrie centrali sono trasformazioni indirette (provate a disegnare un triangolo orientato ed il suo trasformato!).

Def. Una figura ha un centro di simmetria C se è unita rispetto alla simmetria centrale di centro C.

Teorema: il punto di intersezione delle diagonali di un parallelogrammo è il suo centro di simmetria



OSSERVAZIONE: è interessante notare che un triangolo equilatero non ha alcun centro di simmetria, così come tutti i poligoni regolari con un numero dispari di lati.