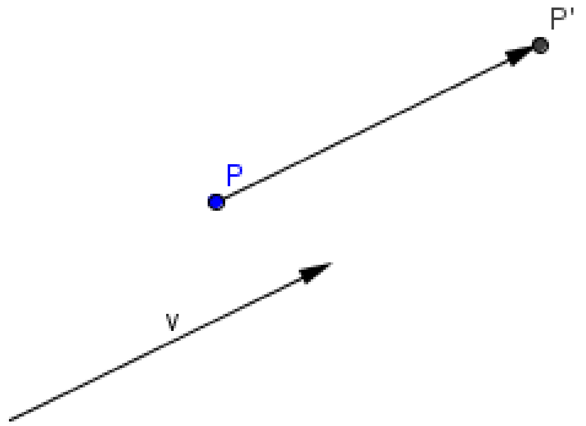
TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE ISOMETRIE TRASLAZIONI: TRATTAZIONE SINTETICA

Appunti scritti dal prof. U.Morra

DEFINIZIONE.

Si consideri un piano e un vettore $\vec{v}$ in esso. E' detta traslazione di vettore $\vec{v}$ l'applicazione che associa a ciascun punto P del piano il punto P' in modo tale che il segmento orientato $\overrightarrow{PP'}$ rappresenti il vettore $\vec{v}$.



$$\overrightarrow{PP'} = \vec{v}.$$

OSSERVAZIONE. Se il vettore $\vec{v} = \vec{0}$, la traslazione coincide con la trasformazione identica, quella che lascia invariati i punti del piano.

Teorema.

Le traslazioni sono isometrie.

Dim: Se $\vec{v} = \vec{0}$ la traslazione coincide con l'identità, pertanto è certamente un'isometria.

Escluso questo caso particolare, bisogna provare che le traslazioni sono delle trasformazioni geometriche, ovvero che la corrispondenza del piano in sé che le definisce è iniettiva e suriettiva. Supponiamo per assurdo che la traslazione non sia iniettiva, cioè che non sia vero che

$$\forall\, P, Q \text{ del piano con } P \neq Q \text{ risulta } P' \neq Q'.$$

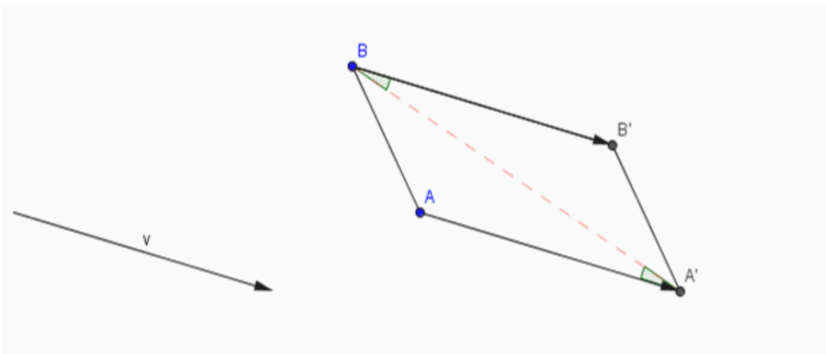
Negare l’affermazione precedente equivale a considerare vera la seguente proposizione:

$\exists P, Q \ del \ piano \ con \ P \neq Q \ per \ cui \ risulta \ P' = Q'$.

Consideriamo perciò due punti distinti P e Q che abbiano la stessa immagine P’, ovvero tali per cui i segmenti orientati $\overrightarrow{PP'}$ e $\overrightarrow{QP'}$ siano entrambi rappresentanti del vettore $\vec{v}$. Da ciò segue che $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QP'} = \vec{v}$, pur avendo stessa “punta” ma “code” diverse, da cui l’assurdo. Dunque non si può mai verificare il caso in cui due punti distinti abbiano la stessa immagine. La traslazione è perciò una corrispondenza iniettiva.

Per quanto riguarda la suriettività, osserviamo che ogni punto P’ del piano ha una preimmagine. Essa coincide infatti con il punto P scelto in modo tale che il segmento orientato $\overrightarrow{PP'}$ sia un rappresentante del vettore $\vec{v}$. Per determinare P basta collocare il vettore $\vec{v}$ in modo tale che la sua punta coincida con P’, mentre la posizione occupata dalla sua coda determina la preimmagine P del punto P’. Rimane così provata la suriettività della traslazione. Quest’ultima è pertanto un’applicazione biunivoca del piano in sé, ovvero si tratta di una trasformazione geometrica.

Dimostriamo ora che si tratta di una isometria, cioè di una trasformazione che agisce sui segmenti non alterandone la lunghezza. Deve essere vero che $\forall A, B \ \overline{AB} = \overline{A'B'}$.



$$\text{ABA'}\cong\text{A'B'B} \begin{cases} BA' \ \ in \ comune \\ BB' \cong AA' \ \ in \ quanto \ \overrightarrow{BB'} \cong \overrightarrow{AA'} = \vec{v} \\ \widehat{A'BB'} \cong \widehat{AA'B} \ perchè \ alterni \ interni \ alle \end{cases}$$

rette AA’//BB’ X A’B

(1° criterio di congruenza dei triangoli)

In particolare risulta $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Q.E.D.

NOTAZIONE: Indichiamo con $\tau_{\vec{v}}$ la traslazione di vettore $\vec{v}$.

Elementi uniti nella traslazione

Punti uniti: non esistono se $\vec{v} \neq \vec{0}$. (Se la traslazione coincide con l' identità, tutti i punti del piano sono uniti)

Rette unite

$$\begin{cases} \text{puntualmente} : \text{non ne esistono} \\ \text{globalmente} : \text{tutte quelle aventi la stessa direzione del vettore } \vec{v} \text{ (costituiscono un fascio improprio)} \end{cases}$$

Le traslazioni conservano la direzione.

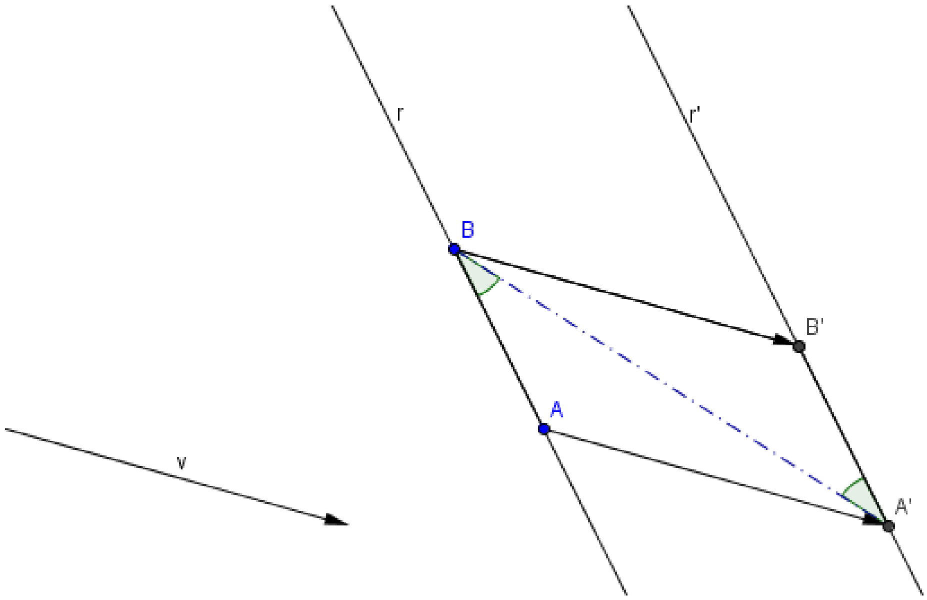
Vale infatti il seguente

Teorema:

Rette che si corrispondono in una traslazione sono parallele.

Dim: consideriamo una generica retta r del piano e proviamo che la sua trasformata r' nella traslazione è parallela ad r. Il teorema è vero se r//$\vec{v}$, in quanto r'=r perché r è una retta globalmente unita.

Rimane da dimostrare il teorema per le rette non parallele al vettore $\vec{v}$. Presi due punti A e B sulla retta r, siano A' e B' i loro trasformati. Questi ultimi si trovano sulla retta r' poiché l'appartenenza di un punto ad una linea è una proprietà affine.

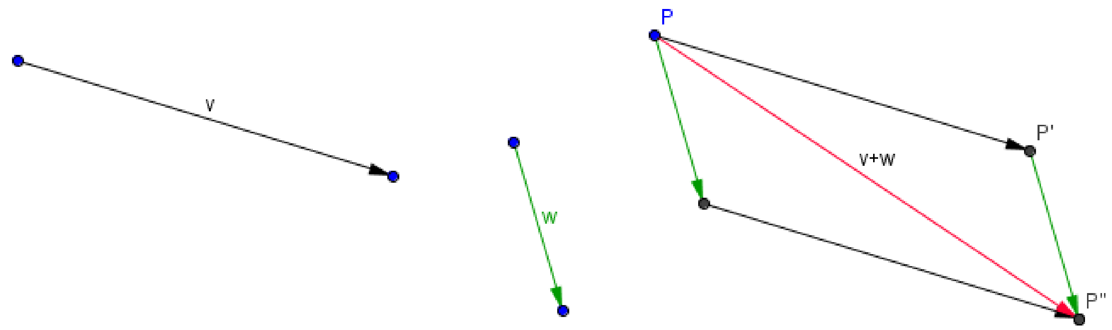


Uniamo per costruzione B ad A' e consideriamo i triangoli ABA' e A'B'B. Essi risultano isometrici per il III criterio di congruenza. Infatti $AB \cong A'B'$ perché la traslazione è un'isometria, A'B è in comune e BB'=AA' per la definizione stessa di traslazione. In particolare dalla congruenza dei triangoli segue che $\widehat{ABA'} \cong \widehat{BA'B'}$. L'ultima coppia di angoli costituisce una coppia di angoli alterni interni delle rette r ed r' tagliate dalla trasversale BA'. Pertanto $r \parallel r'$, per un teorema inverso del parallelismo di rette.

Q.E.D.

OSSERVAZIONI:

1) Le traslazioni sono trasformazioni dirette (provate a disegnare un triangolo orientato ed il suo trasformato!).
2) ${\tau_{\vec{v}}}^{-1} = \tau_{-\vec{v}}$, ovvero l'inversa di una traslazione di vettore $\vec{v}$ coincide con la traslazione di vettore $-\vec{v}$.
3) $\tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{w}} = \tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}+\vec{w}}$, come si nota dalla figura seguente:



L'ultima relazione ci informa del fatto che non è importante l'ordine nella composizione di due traslazioni.