APPUNTI DI MATEMATICA
Le classi numeriche contigue

A cura di U.Morra

Def: due classi A e B (classi = insiemi) non vuote di numeri reali si dicono ***contigue*** se

1. sono ***separate***, ovvero ogni elemento della classe A è minore di ogni elemento della classe B;
2. godono della ***proprietà dell'avvicinamento indefinito***: scelto ad arbitrio un numero positivo ε piccolo quanto si vuole, esiste sempre un elemento della seconda classe e uno della prima la cui differenza sia inferiore ad ε.

Formalizzando con i quantificatori…

Due classi A e B di numeri reali si dicono ***contigue*** *se*

- $\forall a \in A \; risulta \; a < b \quad \forall b \in B$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists b \in B \; ed \; \exists a \in A \;\; t.c. \;\; b - a < \varepsilon$

Un esempio di classi contigue è rappresentato dalla seguente coppia:

$$A = \{perimetri\ dei\ poligoni\ regolari\ inscritti\ alla\ circonferenza\ di\ raggio\ R\}$$

$$B = \{perimetri\ dei\ poligoni\ regolari\ circoscritti\ alla\ circonferenza\ di\ raggio\ R\}$$

Assioma di continuità nell'insieme dei numeri reali.

Se A e B sono due classi contigue di numeri reali, esiste uno ed un solo numero reale che non è inferiore ad alcun numero della classe A e non è superiore ad alcun numero della classe B. Tale elemento è detto di separazione delle due classi.

Oss: se due classi di numeri reali sono separate (cioè godono della proprietà 1), esse ammettono senz'altro un elemento di separazione, ma tale elemento non è unico. Per esempio i due insiemi $A = \{x \in R \;/\; x \leq 0\}$, $B = \{x \in R/x > 2\}$ costituiscono due classi numeriche separate ma non contigue in quanto non soddisfano la proprietà dell'avvicinamento indefinito. Come è ovvio, infatti, tutti gli elementi di A sono inferiori a quelli di B. In secondo luogo, considerando il numero 0 della classe A ed $\varepsilon = 1$, non esiste alcun numero *b* di B t.c. *b-1*< ε, essendo infatti $b \geq 2 \; \forall b \in B$.

Pertanto A e B ammettono infiniti elementi di separazione, per esempio 1, 3/2, o ancora 2. Più in generale tutti quelli dell'intervallo $[0,2]$.