TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE CONDIZIONI AFFINCHE' UN'AFFINITA' SIA UN'ISOMETRIA

Appunti scritti dal prof. U. Morra

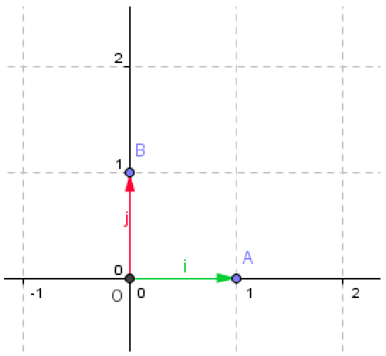
Consideriamo le equazioni analitiche di un'affinità:

$$\varphi: \begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Tali equazioni possono essere formalizzate equivalentemente nel seguente modo:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, in cui la matrice dalla trasformazione $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare.

Indicati con $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ i due versori (vettori di modulo unitario) degli assi cartesiani x ed y rispettivamente, determiniamo i loro trasformati mediante φ. Per far ciò iniziamo a trasformare la coda e la punta di ciascuno dei due versori:



$A \to A'$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + h \\ c + k \end{pmatrix}$$

Dunque $A'(a + h, c + k)$.

$B \to B'$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + h \\ d + k \end{pmatrix}$$

$B'(b + h, d + k)$

Infine

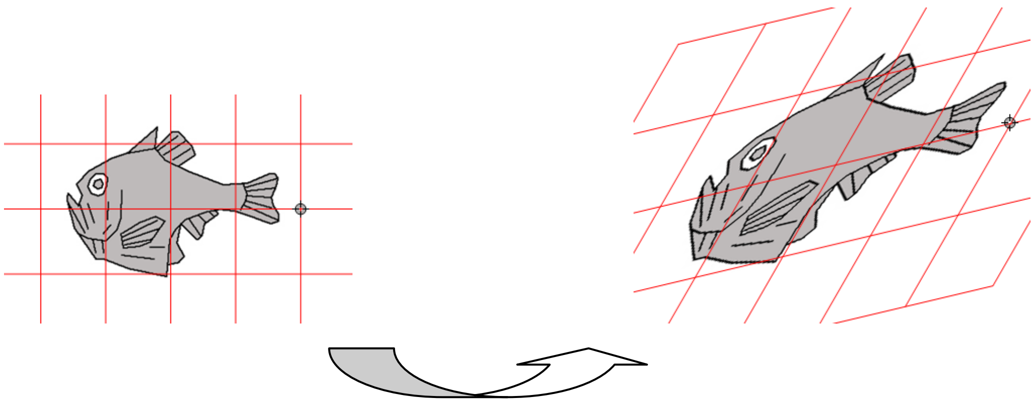
$O \to O'$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

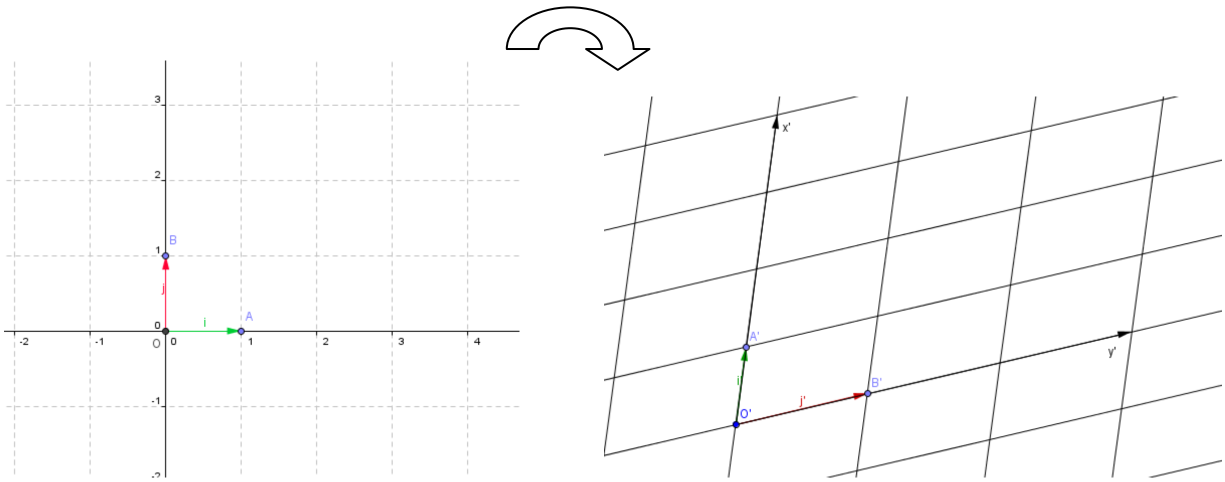
Dunque $O'(h, k)$.

Pertanto risulta $\vec{\imath}' = \overrightarrow{O'A'} = [x_{A'} - x_{O'}, y_{A'} - y_{O'}] = [a, c]$, e $\vec{\jmath}' = \overrightarrow{O'B'} = [x_{B'} - x_{O'}, y_{B'} - y_{O'}] = [b, d]$

Nella prima lezione abbiamo introdotto le affinità partendo da un esempio (quello riportato qui in basso). Il reticolato iniziale composto da quadrettini si è trasformato in un reticolato le cui celle sono tra loro uguali ma non di forma quadrata (o meglio: non necessariamente!).



Dunque il reticolato a maglie quadrate nel piano xOy si trasforma nel reticolato a maglie a forma di parallelogrammi nel piano x'O'y'. I due reticolati sono definiti completamente dai vettori $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ nel primo piano, e dai vettori $\vec{\imath}'$ e $\vec{\jmath}'$ nel secondo piano.



Se la affinità coincide con un'isometria, allora i reticolati sono entrambi a maglie quadrate i cui lati risultano unitari.

Sussiste infatti il seguente

Teorema

Data l'affinità φ di equazioni analitiche:

$$\begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k \end{cases} \quad (\text{ con } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \text{)}$$

si ha la seguente equivalenza

$$\varphi \text{ è un'isometria} \leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

Dim: Sussiste l'implicazione →. Infatti se φ è un'isometria, i moduli dei due versori $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ non si modificano nella trasformazione, dunque anche $\vec{\imath}'$ e $\vec{\jmath}'$ hanno modulo 1 (le lunghezze dei lati delle maglie rimangono invariate). Da ciò risulta che $a^2 + c^2 = 1$ e $b^2 + d^2 = 1$. Inoltre l'angolo tra i vettori $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ non si modifica nella isometria φ, ovvero $\vec{\imath}'$ e $\vec{\jmath}'$ continuano ad essere perpendicolari (la forma dlle maglie del reticolato rimane invariata nella trasformazione). Ciò è vero se il prodotto scalare tra i due vettori è nullo, ovvero $\vec{\imath}' \cdot \vec{\jmath}'$=0, da cui $ab + cd = 0$, poiché il prodotto scalare di due vettori espressi in componenti cartesiane ortogonali è pari alla somma dei prodotti delle componenti omologhe.

Dimostriamo ora l'implicazione ←. Supponiamo vere le condizioni $\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$.

Le prime due uguaglianze indicano che le lunghezze dei vettori unitari si sono mantenute. La III uguaglianza indica invece che i due vettori unitari si sono mantenuti perpendicolari poiché il loro prodotto scalare è nullo. Il reticolato individuato da $\vec{\imath}'$ e $\vec{\jmath}'$ è dunque ancora a quadrati di dimensioni unitarie. La trasformazione, mantenendo lunghezze e forme, è pertanto un'isometria. C.V.D.