- PROBLEMA DELLA DIFFERENZIABILITA' E CONCETTO DI DIFFERENZIALE –

DEFINIZIONE:

Una funzione f è differenziabile in x_o se $\exists a \in \Re$ t.c.

$$f(x_o + h) = f(x_o) + a \cdot h + \omega(h)$$

dove

$$\frac{\omega(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

(quest'ultima condizione è equivalente a dire che $\omega(h)$ è un infinitesimo di ordine superiore al primo per $h \to 0$).

Osservazione: $a=a(x_o)$, cioè il valore di a dipende da x_o.

TEOREMA (DEL DIFFERENZIALE)

f è derivabile in $x_o \Leftrightarrow$ f è differenziabile in x_o.

Dim: ($\Rightarrow$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = f'(x_o)$$

Cioè è equivalente a dire che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o) - f'(x_o) \cdot h}{h} = 0 \qquad (*)$$

Poniamo dunque $\omega(h) := f(x_o + h) - f(x_o) - f'(x_o) \cdot h$

L'ultima espressione è equivalente a

$f(x_o + h) = f(x_o) + f'(x_o) \cdot h + \omega(h)$ in cui $\frac{\omega(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ per la (*).

Pertanto basterà scegliere $a = f'(x_o)$.

($\Leftarrow$) Sia f differenziabile in x_o, cioè $\exists a \in \Re$ t.c.

$f(x_o + h) = f(x_o) + a \cdot h + \omega(h)$, con $\frac{\omega(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Allora esiste finito il limite del rapporto incrementale della funzione calcolato in x_o, poiché:

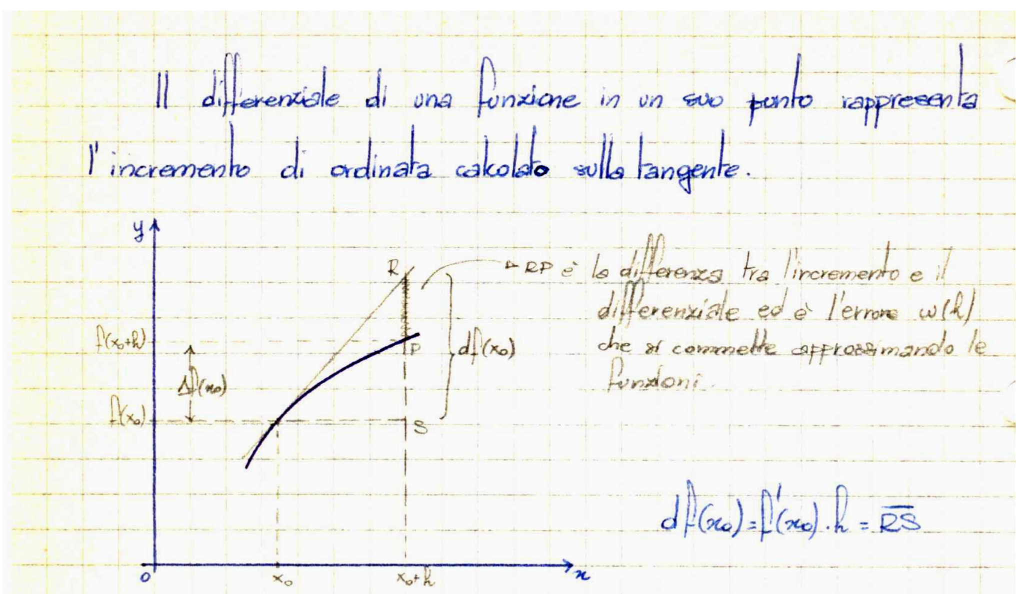
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a\cdot h+\omega(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(a+\frac{\omega(h)}{h}\right)=a+0=a\cdot$$

Pertanto la funzione è derivabile in x_o.

IN CONCLUSIONE:
Dal teorema del differenziale emerge che derivabilità e differenzialità sono due concetti equivalenti (N.B. ciò accade solo in $\Re$, cioè solo per funzioni reali di una sola variabile reale, mentre non è vero in $\Re^2$ o o più in generale in $\Re^n$, cioè per funzioni reali di più variabili reali.)
Inoltre sempre dal teorema si ricava che $a = f'(x_o)$.

DEFINIZIONE DI DIFFERENZIALE:
Si chiama differenziale primo di f in x_o l'espressione $df(x_o) = f'(x_o)\cdot h$.
Pertanto $\Delta f(x_o) = df(x_o) + \omega(h)$, ogni volta che h è abbastanza piccolo.
L'infinitesimo $\omega(h)$ (di ordine superiore al primo) costituisce l'errore che si commette approssimando $\Delta f(x_o)$ con il differenziale $df(x_o)$.

OSSERVAZIONE FONDAMENTALE (Elemento chiarificatore, forse…)
Esistono infiniti modi per poter scrivere
$\Delta f(x_o) = c\cdot h + [...]$ con $c \in \Re$, ma ne esiste uno solo affinché la quantità […] sia un infinitesimo superiore al primo, ponendo $c = f'(x_o)$.



Infine, un'ultima osservazione: se si calcola il differenziale della funzione $f(x) = x$, si ottiene $df(x_o) = 1\cdot h = h$. Generalizzando l'espressione precedente ad un punto qualsiasi x si ha:

$df(x) = 1\cdot h = h$. Infine, poiché $f(x) = x$, sostituendo al posto di *f(x)* (nell'ultima uguaglianza) x, si ha

$dx = h$.

A cosa è servito tutto ciò? A presentare una nuova espressione per il differenziale di una funzione in un punto:
$df(x_o) = f'(x_o) \cdot dx$ o, più in generale, $df(x) = f'(x) \cdot dx$. (non vi ricorda anche il simbolo contenuto nell'integrale indefinito?)