APPUNTI DI MATEMATICA
Perché nella definizione di limite contano di più gli ε piccoli?

A cura di Ugo Morra
A.S. 2005/2006

PREMESSA

Nella definizione di limite finito per x che tende a un valore finito, ovvero
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists I(c))\, t.c. \left(\forall x \in I(c) \cap D_f \ con \ x \neq c\right) \ risulta \ |f(x) - l| < \varepsilon$,
l'intorno completo del punto c dipende dalla scelta (arbitraria!) di ε.
Se ad esempio si scelgono valori di ε via via più prossimi allo zero (cioè decrescenti e convergenti a zero) si determineranno degli intorni completi di c via via più "stretti", di lunghezza cioè sempre più piccola.
Dunque gli intorni *I(c)* dipendono dal valore di ε scelto. Per tale motivo a volte può convenire esplicitare tale dipendenza da ε utilizzando la formalizzazione seguente: $I_\varepsilon(c)$ al posto di $I(c)$ [si leggerà: l'intorno $I(c)$ dipendente dalla scelta di ε].

DOMANDA

Perché nella definizione di limite contano di più gli ε piccoli?
Il motivo è suggerito dalla seguente

PROPOSIZIONE

Sia k>0 (numero positivo fissato). Vale la seguente equivalenza:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \quad \iff \quad \underbrace{(\forall\ 0 < \varepsilon \le k)\ (\exists I_\varepsilon(c))\ t.c.\ \left(\forall x \in I_\varepsilon(c) \cap D_f \ con \ x \neq c\right) \ risulta \ |f(x) - l| < \varepsilon}_{(*)}$$

DIMOSTRAZIONE

Il verso $\Rightarrow$ della equivalenza è di facile dimostrazione. Infatti, poiché per ipotesi risulta $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$, ovvero

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists I(c))\, t.c. (\forall x \in I(c) \cap D_f \ con \ x \neq c) \quad risulta \ |f(x) - l| < \varepsilon$,

in particolare si ha

$(\forall \ 0 < \varepsilon \leq k)(\exists I_\varepsilon(c)) \ t.c. \ (\forall x \in I_\varepsilon(c) \cap D_f \ con \ x \neq c) \ risulta \ |f(x) - l| < \varepsilon$,

essendo gli $0 < \varepsilon \leq k$ una parte (sottoinsieme) di quelli positivi.

La dimostrazione della validità della implicazione inversa ($\Leftarrow$) è un po' meno banale.

Si suppone verificata la condizione (*), ovvero che:

$(\forall \ 0 < \varepsilon \leq k) \ (\exists I_\varepsilon(c)) \ t.c. \ (\forall x \in I_\varepsilon(c) \cap D_f \ con \ x \neq c) \ risulta \ |f(x) - l| < \varepsilon$

Si vuole provare che $\lim_{x \to c} f(x) = l$, ossia che

$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists I(c))\, t.c. (\forall x \in I(c) \cap D_f \ con \ x \neq c) \ risulti \ |f(x) - l| < \varepsilon$.

Poiché per tutti gli $0 < \varepsilon \leq k$ la definizione originaria di limite è soddisfatta per ipotesi, rimane da provarne la validità per tutti gli $\varepsilon > k$. Sia dunque $\varepsilon > k$ fissato ad arbitrio. Poniamo $I_\varepsilon(c) := I_k(c)$, cioè coincidente con l'ultimo degli intorni che verificano (*).

Con tale scelta - uniforme per tutti gli intorni associati agli $\varepsilon > k$ - risulta:

$(\forall \varepsilon > k) \ (\exists I_\varepsilon(c) = I_k(c)) \ t.c. \ (\forall x \in I_\varepsilon(c) \cap D_f \ con \ x \neq c) \ risulta \ |f(x) - l| < k$,

e poiché ε è un maggiorante per k e k lo è per la distanza tra *f(x)* ed *l*, ε risulta essere anche maggiorante di $|f(x) - l|$, ovvero:

$$|f(x) - l| < k < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I_\varepsilon(c) \cap D_f \quad con \quad x \neq c$$

Pertanto

$(\forall \varepsilon > k) \ (\exists I_\varepsilon(c) = I_k(c)) \ t.c. \ (\forall x \in I_\varepsilon(c) \cap D_f \ con \ x \neq c) \ risulta \ |f(x) - l| < \varepsilon$,

cioè la tesi.

Osservazione: da queste considerazioni appare evidente che nello svolgimento degli esercizi sulla verifica dei limiti non deve destare preoccupazione alcuna un'eventuale restrizione (per quanto detto solo apparente) dei valori di ε in modo tale da confinare gli stessi in un intervallo limitato avente 0 come estremo inferiore. La cosa in sé non è superflua perché può essere indotta da esigenze di calcolo (come l'applicazione di funzioni logaritmiche,ecc.).

Spero di essere stato chiaro e …utile.

Buon lavoro e buono studio!

FINE