TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
LE SIMILITUDINI

Appunti scritti dal prof. U. Morra

Si definisce similitudine di rapporto k>0 quella trasformazione geometrica del piano in sé tale per cui risulta $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$, $\forall\ A, B$ del piano.

Una similitudine è dunque una trasformazione del piano in sé che conserva i rapporti tra le lunghezze di due segmenti corrispondenti qualsiasi.

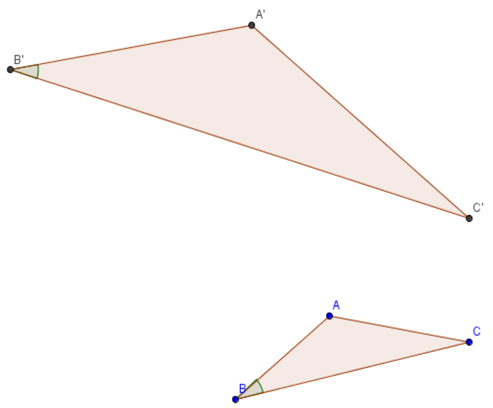
Come caso particolare delle similitudini troviamo le isometrie (similitudini di rapporto k=1).

Proviamo che in una similitudine si conservano gli angoli.

Teorema

Siano A, B, C tre punti non allineati e A', B', C' i rispettivi punti trasformati mediante una similitudine. Risulta: $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

Dim:



I due triangoli ABC e A'B'C' sono simili per il terzo criterio di similitudine dei triangoli, poiché in essi sussiste la seguente proporzione:

$$\overline{A'B'}:\overline{AB} = \overline{B'C'}:\overline{BC} = \overline{A'C'}:\overline{AC} = k,$$

dove k è il rapporto di similitudine.
Dalla similitudine dei triangoli segue che gli angoli corrispondenti sono congruenti. C.V.D.

Altre proprietà delle similitudini:

1. **La composizione di due similitudini di rapporti *k* e *k'* rispettivamente è una similitudine di rapporto *kk'*** (N.B: ciò non vuol dire che le similitudini sono trasformazioni commutabili!)
   Dim: $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$ (AB e A'B' si corrispondono nella similitudine di rapporto k)
   $\overline{A''B''} = k' \cdot \overline{A'B'}$ (A'B' e A''B'' si corrispondono nella similitudine di rapporto k').
   Pertanto nella composizione delle due similitudine si ha:
   $\overline{A''B''} = k' \cdot \overline{A'B'} = k' \cdot\ k \cdot \overline{AB} = (kk') \cdot \overline{AB} \quad \forall A, B\ del\ piano$, il che significa che la composizione delle due similitudini ha generato una similitudine di rapporto *kk'*.

2. **Una similitudine manda rette in rette (ovvero è un'affinità).**

Dim: sia r una retta del piano ed A, B due suoi punti. Un ulteriore punto P di r si può caratterizzare mediante una delle tre condizioni seguenti:

$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB}$ oppure $\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP}$ oppure $\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{AB}$

Se per esempio P verifica la prima condizione allora

$\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB} = k \cdot (\overline{AP} + \overline{PB}) = k \cdot \overline{AP} + k \cdot \overline{PB} = \overline{A'P'} + \overline{P'B'}$, dunque P' appartiene alla retta per A' e B' . Analogamente negli altri casi.

3. **Una similitudine manda circonferenze in circonferenze** [Se γ è una circonferenza di centro C e raggio r, la trasformata di γ è la circonferenza γ' di centro C' e raggio kr].

4. **La trasformazione inversa di una similitudine di rapporto k>0 è ancora una similitudine di rapporto 1/k.**

5. **Tutte le parabole sono simili.**

CONSEGUENZA SULLA STRUTTURA ALGEBRICA DI $(Sim(R^2), \circ)$

L'insieme delle similitudini del piano munito dell'operazione di composizione, ovvero la coppia $(Sim(R^2), \circ)$, è un gruppo non abeliano. E' abbastanza banale provare che l'insieme delle similitudini con l'operazione di composizione ha la struttura di un gruppo. Per mostrare che non è abeliano, basta esibire l'esempio di una coppia di similitudini non commutabili. A tal fine si può ricorrere alla scelta di due opportune isometrie (casi particolari di similitudini): per esempio una simmetria assiale di retta r e una traslazione di vettore **v** non parallelo alla retta r. Sappiamo bene (abbiamo provato anche con il Geogebra) che tali due similitudini non sono commutabili.

TRATTAZIONE ANALITICA DELLE SIMILITUDINI

Consideriamo le equazioni analitiche di un'affinità:

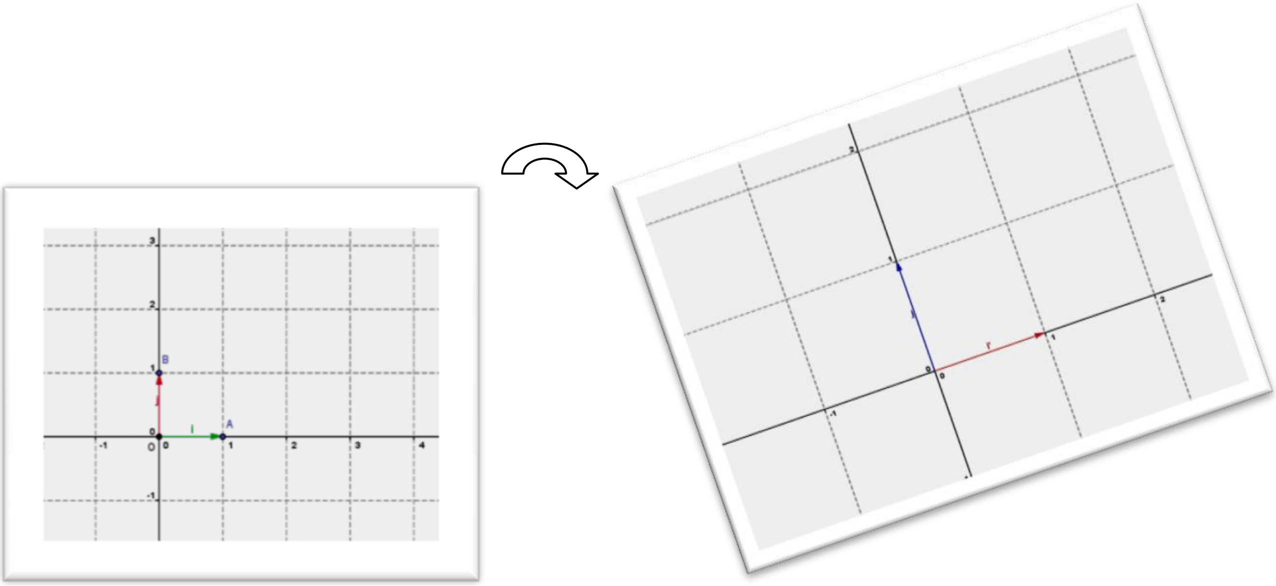
$$\varphi: \begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Tali equazioni possono essere formalizzate equivalentemente nel seguente modo:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, in cui la matrice dalla trasformazione $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare.

Abbiamo già provato (cfr altri appunti sulle isometrie) che i trasformati dei versori $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ degli assi cartesiani x ed y sono i vettori $\vec{\imath}' = [a, c]$ e $\vec{\jmath}' = [b, d]$.

Il reticolato a maglie quadrate nel piano xOy si trasforma con una similitudine in un altro reticolato a maglie ancora quadrate nel piano x'O'y' (i due reticolati sono definiti completamente dai vettori $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ nel primo piano, e dai vettori $\vec{\imath}'$ e $\vec{\jmath}'$ nel secondo piano).



Sussiste infatti il seguente

Teorema

Data l'affinità φ di equazioni analitiche:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad \left(\text{con } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \right)$$

si ha la seguente equivalenza

$$\varphi \text{ è una similitudine} \leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

Dim: Sussiste l'implicazione →. Infatti se φ è una similitudine, i moduli dei due vettori $\vec{\imath}\,'$ e $\vec{\jmath}\,'$ sono uguali tra loro (i lati delle maglie trasformate sono uguali). Da ciò risulta che $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Inoltre l'angolo tra i vettori $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ non si modifica nella similitudine φ, ovvero $\vec{\imath}\,'$ e $\vec{\jmath}\,'$ continuano ad essere perpendicolari (la forma delle maglie del reticolato rimane quadrata nella trasformazione). Ciò è vero se il prodotto scalare tra i due vettori è nullo, ovvero $\vec{\imath}\,' \cdot \vec{\jmath}\,'$=0, da cui $ab + cd = 0$, poiché il prodotto scalare di due vettori espressi in componenti cartesiane ortogonali è pari alla somma dei prodotti delle componenti omologhe.

Dimostriamo ora l'implicazione ←. Supponiamo vere le condizioni $\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$.

Le prime due uguaglianze indicano che i moduli dei trasformati dei versori $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ sono uguali. La II uguaglianza indica invece che i due vettori $\vec{\imath}\,'$ e $\vec{\jmath}\,'$ si sono mantenuti perpendicolari poiché il loro prodotto scalare è nullo. Il reticolato individuato da $\vec{\imath}\,'$ e $\vec{\jmath}\,'$ è dunque ancora a quadrati. La trasformazione è pertanto una similitudine. C.V.D.